विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 1-6

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 1-6

क्रिस्टल वृद्धि एवं बहु प्ररूपता *

प्रो० अजित राम वर्मा

निदेशक, नेशनल फिजिकल लैबोरेटरी, नई दिल्ली

ठोसों की आन्तरिक परमाणविक संरचना के अध्ययन में एक्स-किरण विवर्तन विधियों के व्यवहार के फलस्वरूप यह पता चला है कि सभी ठोस प्रायः क्रिस्टीलय हैं। उनमें तीन दिकों में परमाणुओं या परमाणुओं के समूह की आवर्त व्यवस्था पाई जाती है। यह व्यवस्था प्लास्टिक, केश तथा ऊन जैसे ठोसों में भी पाई जाती है। किसी भी ठोस पदार्थ के भीतर परमाणुओं की सही-सही व्यवस्था को उसकी क्रिस्टल-संरचना कहते हैं और अधिकांश रासायनिक यौगिक सामान्यतः निश्चित क्रिस्टल संरचनाओं के रूप में क्रिस्टलित होते हैं जिनमें प्रत्येक की निश्चित संमिति, इकाई कोशा (सेल) तथा प्रत्येक कोशा में संरचना इकाइयाँ होती हैं। इस प्रकार सोडियम क्लोराइड में चाहे वह समुद्र से प्राप्त हो या प्रयोगशाला में तैयार किया गया हो अथवा खनिज के रूप में प्राप्त हो, सोडियम और क्लोरीन परमाणु एक दूसरे से एक ही दूरी पर पाये जाते हैं। किन्तु ऐसे भी अनेक पदार्थ हैं जो एक से अधिक संरचना में क्रिस्टलित होते हैं। यह गुणधर्म बहुआकृतिकता कहलाता है। इसका सर्वश्रेष्ठ उदाहरण कैल्सियम कार्बोनेट है जो आइसलैंडस्पार खनिज के रूप में उभय विवर्तन गुणधर्म प्रदर्शित करने के कारण बहुत काल तक अध्ययन का विषय बना रहा। चतुष्कोणी (rhombohedral) सेल के त्रिकोणीय (triagonal) अक्ष के साथ कोण बनाते हुये किसी वस्तु को देखने पर दो बिम्बों का बनना न्यूटन के प्रकाश कणिका सिद्धान्त के आधार पर विवेचित नहीं हो सकता किन्तु हाइगेन के प्रकाश के तरंग सिद्धान्त द्वारा इस घटना को भलीभाँति समझा जा सकता है। उसी रासायनिक सूत्र वाले एक अन्य खनिज, ऐरेगोनाइट. द्वारा यह गुणधर्म नहीं प्रदर्शित किया जाता क्योंकि आर्थोराम्बिक इकाई सेल में कार्बोनेट समूहों का भिन्न स्थानिक या आकाशीय (spatial) सम्बन्ध पाया जाता है। रसायनज्ञों के लिये ये दोनों ही अपररूप एक ही पदार्थ $CaCO_3$ हैं किन्तु क्रिस्टल-विशेषज्ञ के लिये वे दो विभिन्न क्रिस्टल हैं जिनकी संरचनायें एवं गुणधर्म पृथक-पृथक हैं।

बहुप्ररूपता (Polymorphism) की यह घटना अब ठीक-ठीक ज्ञात हो चुकी है और विभिन्न संरचनात्मक अपररूप निश्चित ऊष्मागतिकी कलाओं (phases) के रूप में मान्य है जिनका आपेक्षिक स्थायित्व ताप और दाब की अवस्थाओं पर निर्भर करता है। निस्संदेह अधिकांश पदार्थों में अधिक ताप और दाब प्रयुक्त होने पर संरचनात्मक रूपान्तरण होता है और यह अत्यन्त सामान्य घटना के रूप में ज्ञात है। फलतः जब सोडियम क्लोराइड पर लगभग 18000 वायुमण्डल दाब व्यवहृत किया जाता है तो

---

* 3 जनवरी 1967 को, हैदराबाद में आयोजित विज्ञान गोष्ठी, के समक्ष दिया गया अध्यक्षपदीय भाषण।

वह सीजियम क्लोराइड प्रकार की संरचना में, जो बहुआकृतिक संक्रमण (polymorphic transition) है, परिवर्तित हो जाता है। इसी प्रकार 1200-2400° से० ताप तथा 55-100 सहस्र वायुमण्डलीय दाब पर कार्बन का ग्रेफाइट अपररूप हीरे में परिवर्तित हो जाता है । किन्तु अभी तक जो कृत्रिम हीरे तैयार किये गये हैं वे छोटे तथा अपव्ययी हैं।

एक-दिकीय बहुआकृतिकता की एक विशेष किस्म बहुप्ररूपता (polytypism) कहलाती है जो सामान्य बहु-आकृतिकता से इस बात में भिन्न है कि इसमें ऊष्मागतिकीय अथवा कला पक्ष का नितान्त अभाव प्रतीत होता है। यह सिलिकन कार्बाइड, जिंक सल्फाइड तथा कैल्सियम आयोडाइड जैसी कतिपय सघन संकुलित तथा स्तर संरचनाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इन पदार्थों की संरचना सम अन्तरों पर परमाणुओं के एक दूसरे के शीर्ष पर स्थित होकर एक जैसे सम स्तरों द्वारा निर्मित होती है। ऐसा प्रत्येक पदार्थ अनेक संरचनात्मक अपररूप प्रदर्शित करता है जिन्हें बहुप्ररूप (polytypes) कहते हैं और उनमें केवल इन संस्तरों के एक दूसरे के शीर्ष पर समूहन के ढंग में विभिन्नता पाई जाती है। किसी भी बहु प्ररूप में सभी संस्तर एक समान होते हैं और इस प्रकार परमाणुओं को ग्रहण करने वाले बल भी। इन अपररूपों पर न तो ताप का और न दाब का ही कोई प्रभाव होता है। इनमें प्रायः एक से भौतिक गुणधर्म पाये जाते हैं। प्रत्येक पदार्थ के अनन्त अपररूप हो सकते हैं किन्तु ये एक दूसरे में रूपान्तरित नहीं होते। ऊष्मागतिकी दृष्टि से इनमें प्रायः एक सी मुक्त ऊर्जायें पाई जाती हैं और ये यौगिक की भिन्न कलायें नहीं मानी जा सकतीं। सबसे प्रभावोत्पादक बात है इनकी शतत आवृति एवं संस्तरों का समूहन क्रम (stacking sequence) जो सौ या कभी कभी कई सहस्र स्तरों के पश्चात् पूर्ण क्रिस्टलीय नियमितता के रूप में होता है। निर्जीव जगत में ऐसी विशाल आवृति दूरियाँ जो 250 से 2500A° तक की होती हैं, दुर्लभ हैं किन्तु क्रिस्टलीय वाइरसों तथा अन्य जैव नमूनों में सामान्य हैं। इसके प्रसिद्ध उदाहरण हैं शलजम का पीत मौजैक वाइरस (f. c. c., 700A° हीरा संरचना) तथा कतिपय रेशेदार प्रोटीन (100-1400A°)। आखिर उन बलों की क्या प्रकृति हो सकती है अथवा वह कौन सी क्रियाविधि है जिससे बहुप्ररूपों में इतना दीर्घ आवृति-परास पाया जाता है? अभी तक भौतिकज्ञों को जितने भी परमाणविक बल ज्ञात हैं उनमें से किसी में भी इतना दीर्घ परास तथा प्रभाव नहीं देखा गया। इसी प्रश्न की ओर विगत अनेक वर्षों से हमारा ध्यान केन्द्रित रहा है किन्तु अभी तक इसका सन्तोषजनक हल नहीं निकल पाया।

यह किसी भी सामान्य जन को विशुद्ध ज्ञानपूर्ण प्रश्न प्रतीत होगा जिसका महत्व अत्यन्त सीमित है किन्तु यदि ठोसों में कार्यशील अन्तरा-परमाणुक बलों की वास्तविक प्रकृति को हमें समझना है तो प्रकृति की ऐसी ही विचित्रताओं पर अनुसन्धान करके उनकी विवेचना करनी होगी। इन्हीं विचित्रताओं में प्रकृति ने वैज्ञानिकों के लिए संकेत छोड़ दिये हैं किन्तु वे अभी पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने के लिए अपने लक्ष्य से कोसों दूर हैं। विज्ञान की प्रगति ऐसे ही अपवादों के अध्ययन पर निर्भर करती है।

बहुप्ररूता की विवेचना के लिए कई प्रकार के सिद्धान्त प्रस्तुत किये गये हैं। इनमें से सर्वप्रमुख सिद्धान्त फ्रैंक का है जो क्रिस्टल वृद्धि की स्थान-भ्रंश क्रियाविधि (dislocation mechanism) पर आधारित है। अब यह भलीभाँति ज्ञात है कि विलयन या वाष्प से निम्न अतिसंतृप्तता पर स्क्रू स्थान-भ्रंश के चारों ओर कुण्डली वृद्धि करके क्रिस्टल बढ़ता है। ऐसा विश्वास है कि क्रिस्टलन का प्रारम्भ सूक्ष्म दिक् वाली

पतली पट्टिकाओं (platelets) के निर्माण से होता है जो अपद्रव्यों के अनियमित वितरण के कारण अथवा अन्य कारणों से आत्म प्रतिबलित हो जाता है। यह प्रतिबल पट्टिका के उस अंश द्वारा जो सर्पण (slip) तल के ऊपर से होकर फिसलता रहता है उन्मोच होता है जिससे क्रिस्टल पट्टिका में स्क्रू स्थान-भ्रंश उत्पन्न हो जाता है। इससे क्रिस्टल की पृष्ठ पर छिन्न पद (terminated step) विकसित होता है जो एक बिन्दु पर लंगर डालकर क्रिस्टलन के अग्रसर होने पर उसी बिन्दु पर परिभ्रमण करने के लिये स्वतन्त्र रहता है। इस पद की ऊँचाई आणविक माप की होती है। वृद्धि के समय यह पद स्वयमेव अग्रसर होता रहता है जिसके फलस्वरूप न्यून अतिसंतृप्तता पर भी यह वृद्धि जारी रहती है। इस प्रक्रम (क्रियाविधि) के दो परिणाम होंगे :—

1. वृद्धि पूर्ण हो जाने पर क्रिस्टल पृष्ठ पर कुण्डली का चिन्ह बन जाना चाहिए जिसका आकार क्रिस्टल की संमितियों के अनुरूप होना चाहिये।

2. इन वृद्धि कुण्डलियों की पद ऊँचाई को इकाई सेलों के आकार से, जिसे एक्स-किरण विवर्तन विधियों द्वारा ज्ञात किया जाता है, सम्बन्धित होना चाहिए।

जब पहले पहल 1950 ई० के लगभग ये विचार प्रस्तुत किये गये तो प्रथम विचार जो उत्पन्न हुआ वह यह था कि ये आणविक वृद्धि-कुण्डलियाँ दृश्य नहीं होंगी। किन्तु मैंने सिलकन कार्बाइड क्रिस्टलों के फलक पर कई प्रकार की वृद्धि-कुण्डलियाँ देखी हैं—कला विपर्यास सूक्ष्मदर्शिकी (phase contrast microscopy विधि से) 10 कुण्डली पर ऊंचाई के ठीक ठीक निश्चयन के लिये मैंने टोलैस्की की बहुल किरण व्यतिकरण की (multiple beam interferometry) विधि प्रयुक्त की। प्रसन्नता की बात यह है कि पद ऊँचाइयाँ एक्स-किरण सेल आकार के तुल्य या उनसे सम्बन्धित ज्ञात हुईं। इस प्रकार क्रिस्टल वृद्धि के स्क्रू स्थान-भ्रंश सिद्धान्त (screw dislocation theory) की पुष्टि हुई।

इस अध्ययन को विस्तृत करने के लिये सिलिकन कार्बाइड के कतिपय बहुप्ररूपों का अध्ययन किया गया और उनकी पद ऊँचाइयों एवं एक्स-किरण इकाई सेल आकार के मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात किया गया। इसके फलस्वरूप फ्रैंक ने बहुप्ररूपों के निर्माण का स्क्रू स्थान-भ्रंश सिद्धान्त प्रस्तुत किया। तदनुसार क्रिस्टल पृष्ठ पर निर्मित प्रारम्भिक पद की ऊँचाई एवं संरचना के द्वारा निर्मित होने वाला बहुप्ररूप निश्चित होगा। इस प्रकार बहुप्ररूपता को क्रिस्टल वृद्धि के परिणामस्वरूप जनित माना जा सकता है—स्क्रू का अन्तराल इकाई सेल की लम्बाई बन जाता है और लम्बी दूरियों तक व्यवस्थित बलों के उपस्थित रहने की आवश्यकता नहीं रह पाती। उदाहरणार्थ 100 संस्तरों वाले प्रारम्भिक पद के द्वारा ऐसा बहुप्ररूप विकसित होगा जिसमें प्रत्येक 100 संस्तरों के बाद वही संरचना आवृति करेगी। यह विवेचना सरल एवं आश्वसनीय है। इसके लिये विभिन्न बहु प्ररूपों की वृद्धि कुण्डलियों का अध्ययन किया गया। अनेक बहुप्ररूपों में दृश्य वृद्धि कुण्डलियों की पद ऊँचाइयों एवं एक्स-किरण इकाई सेलों के आकारों में प्रत्यक्ष सह-सम्बन्ध देखा गया जिससे 1957 ई० में ऐसा अनुभव होने लगा कि बहुप्ररूपता की घटना की सन्तोषजनक विवेचना प्राप्त हो गई है।

किन्तु अनेक शोधकर्ताओं ने, विशेषतः प्रोफेसर जैगोडजिस्की ने बहुप्ररूपता के स्थान-भ्रंश सिद्धान्त के कतिपय पक्षों पर सन्देह प्रकट किया है। फलतः हमने सिलिकन कार्बाइड तथा कैडमियम आयोडाइड

में बहुप्ररूपता की घटना के लिये विस्तार से प्रयोगात्मक अनुसन्धान प्रारम्भ किये। इनमें निम्न क्रियायें सम्मिलित थीं—

1. बहुप्ररूप पदार्थों के एकल क्रिस्टलों को सुविकसित करना;
2. वृद्धि कुंडलियों के लिये इन क्रिस्टलों के पृष्ठों का कला विपर्यास सूक्ष्मदर्शिकी (phase contrast microscopy) द्वारा निरीक्षण करना
3. येलेंस्की की बहुल किरण व्यतिकरण की (multiple beam interferometric) विधियों द्वारा कुण्डली-पद-ऊँचाइयों का सही सही मापन;
4. जिस क्रिस्टल का प्रकाशीय परीक्षण हो चुका उसी का एक्स किरण विवर्तन स्पेक्ट्रा अंकन;
5. विभिन्न बहुप्ररूपों की इकाई सेल आकार तथा विस्तृत परमाणविक संरचना ज्ञात करना।

क्रिस्टल के सम्बन्ध में उपर्युक्त जानकारी प्राप्त कर लेने के पश्चात् दो प्रकार से इसकी व्याख्या की। प्रथम तो वृद्धि कुण्डली की पद ऊँचाई का एक्स किरण सेल की ऊँचाई से सम्बन्ध और दूसरे यह कि यौगिक की मूलभूत कलाओं में से किसी के सैद्धान्तिक स्थान-भ्रंश द्वारा कोई वास्तविक क्रिस्टल संरचना उत्पन्न तो नहीं हो सकती।

सिलिकन कार्बाइड तथा कैडमियम आयोडाइड के अनेक क्रिस्टलों के साथ किये गये इस प्रकार के विश्लेषण से जो परिणाम प्राप्त हुये उन्हें सारणीबद्ध किया जा रहा है।

1. स्थानभ्रंश सिद्धान्त को पुष्ट करने वाले बहुप्ररूप

बहुप्ररूप	जैडोनोव संकेत	विवरण
सिलिकन कार्बाइड SiC		
6H	(33)	इन क्रिस्टलों में वृद्धि-कुण्डलियों की पद ऊँचाइयों
15R	$[(23)]_3$	एवं इकाई सेल आकार में सीधा सम्बन्ध है।
21R	$[(34)]_3$	यह सम्बन्ध षडभुजीय तथा चतुष्कोणी बहुप्ररूपों
33R	$[(33,32)]_3$	के लिये है।
कैडमियम आयोडाइड CdI_2		
2H	(11)	केवल 2H प्रकार में कुण्डली की ऊँचाई C—दिक् की पूर्णसंख्यक गुणित थी।

निष्कर्ष : उपर्युक्त SiC बहुप्ररूपों की वृद्धि स्थान-भ्रंश क्रिया विधि द्वारा पूरी तरह विवेचित होती है किन्तु CdI_2 में 2H बहुप्ररूप के अतिरिक्त अन्य किसी के साथ कोई सम्बन्ध स्थापित नहीं होता।

2. स्थानभ्रंश क्रियाविधि के अनुसार सम्भावित बहुप्ररूप किन्तु जो वृद्धि कुण्डलियां नहीं प्रदर्शित करते—

बहुप्ररूप	जैडोनोव संकेत	विवरण
SiC		
57R	$[(33)_2\ 34]_3$	यद्यपि इन बहुप्ररूपों का बनाना स्थानभ्रंश क्रियाविधि द्वारा विवेचित किया जा सकता है किन्तु वृद्धि-कुण्डलियाँ प्रकट न होने के कारण इनमें स्थानभ्रंश का कोई प्रमाण नहीं देखा जाता।
111R	$[(33)_5\ 34]_3$	
CdI_2		
26H	$(22)_6 11$	वही

निष्कर्ष : या तो इनमें से कोई भी बहुप्ररूप कुण्डली वृद्धि द्वारा जनित नहीं हुई या वृद्धि की अन्तिम दशाओं में वृद्धि-कुण्डली विलुप्त हो गई।

3. स्थानभ्रंश क्रियाविधि के अनुसार असम्भव बहुप्ररूप किन्तु जिनमें वृद्धि कुण्डलियाँ पाई जाती हैं—

SiC

54H), 66H) — ये दोनों 6H कला पर निर्भर हैं। इकाई सेल मूलभूत संरचना के C-दिक् के पूर्ण-संख्यक गुणित हैं फलतः ये स्थान-भ्रंश के कारण जनित नहीं हो सकते। फिर भी इनमें वृद्धि कुण्डलियां देखी जाती हैं जिनकी पद-ऊंचाई इकाई सेल आकार से सहसम्बन्धित हैं।

126R — कुण्डली की पद ऊँचाई से स्थान-भ्रंश क्रियाविधि द्वारा वृद्धि का प्रमाण प्राप्त होता है किन्तु इनकी संरचना $[(33)_3(43)_2\ 32\ 23]_3$ संरचना उससे भिन्न है।

CdI_2

28H — इसका जैडोनोव संकेत $(22)_6 1111$ है। यह 4H कला पर आधारित है किन्तु इसका इकाई सेल 4H के C-दिक् से ठीक 7 गुना है। इसके (0001) फलक पर एकल कुण्डली देखी जाती है।

4. ऐसे बहुप्ररूप जो न तो स्थान-भ्रंश द्वारा सम्भव हैं और न वृद्धि-कुण्डली ही प्रदर्शित करते हैं—

SiC

36H — 6H पर आधारित जिसकी संरचना $(33)_2\ 34(33)_2\ 32$ है।

90R — 15R पर आधारित जिसकी संरचना $[(23)_4\ 3322]_3$ है।

CdI_2

22H — 2H पर आधारित जिसकी संरचना $(11)_5\ 2211\ 2211$ है।

26H — 2H पर आधारित जिसकी संरचना $[2(11)_2]_3\ 2(11)_3$ है।

निष्कर्ष : ये बहुप्ररूप मूलभूत कलाओं में जनित नहीं हो सकते क्योंकि परिणामी बहुप्ररूपों का वर्गर वेक्टर मूलभूत कला के C-दिक् का पूर्णसंख्यक गुणित है। इनमें कोई वृद्धि-कुण्डलियाँ नहीं देखी जातीं।

5. अनियमित संरचनायें

अंशतः अनियमित बहुप्ररूप देखे गये हैं जिनमें इतस्ततः समूहन (stacking) दोष हैं और उनमें दीर्घ परास की प्रवृति देखी जाती हैं।

निष्कर्ष : ऐसी संरचनाओं को स्थान-भ्रंश के आधार पर नहीं समझा जा सकता।

विवेचना

उपर्युक्त प्रेक्षणों से यह देखा जा सकता है कि कई बहुप्ररूपों में ऐसी त्रुटियाँ दृष्टिगोचर हैं जो बहुप्ररूपता के स्क्रू स्थान-भ्रंश सिद्धान्त द्वारा विवेचित नहीं हो सकतीं। अभी तक प्रस्तुत अन्य सिद्धान्तों द्वारा भी बहुप्ररूपता के सम्बन्ध में प्राप्त सभी तथ्यों की विवेचना नहीं हो पाती। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि इतने दीर्घ अवकाश वाले व्यवस्थित बहुप्ररूपों का निर्माण जिनमें कुछ इकाई सेलों की ऊँचाई अभी तक ज्ञात परमाणविक बलों से अधिक है, सैद्धान्तिक दृष्टि से पुनः निरीक्षित होना चाहिए।

निर्देश

1. अजित राम वर्मा तथा पी॰ कृष्ण। "Polymorphism and Polytypism in Crystals" **जान विले एण्ड संस, न्यूयार्क,** 1966.

2. पी॰ कृष्ण तथा अजित राम वर्मा। "Polymorphism in one-dimension" *Physica Status Solidi* 1966, **17**, 437-77.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 7-9

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, 10, 7-9

सोडियम फ्लुओराइड की उपस्थिति में फेरस आयन, Fe++, की अपचायक क्षमता पर एक टिप्पणी

हरिशंकर वर्मा, मनहरन नाथ श्रीवास्तव तथा बी० बी० एल० सक्सेना

रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—अक्टूबर 1, 1966]

सारांश

यह देखा गया है कि सोडियम फ्लुओराइड संकरक अभिकर्मक की उपस्थिति में फेरस आयन (Fe^{++}) की अपचायक क्षमता बढ़ जाती है और वह आयोडीन को आयोडाइड में, क्यूप्रिक को क्यूप्रस में, मरक्यूरिक को मरक्यूरस में, तथा सिल्वर, प्लैटिनम, पैलेडियम के लवणों एवं सेलेनाइट तथा टेलूराइट को क्रमशः सिल्वर प्लैटिनम, पैलेडियम, सेलीनियम तथा टेलूरियम धातुओं में अपचित कर देता है।

Abstract

A note of the reducing potentiality of ferrous ion (Fe^{++}) **in** $Fe^{II}-NaF$ **system.** *By* Hari Shanker Verma, Man Haran Nath Srivastava and B.B. L. Saxena, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad, India.

It is observed that is presence of sodium fluoride as a complexing agent, ferous ion becomes a more potential reducing agent and reduces iodine to iodide, Cu^{++} to Cu^{+}, Hg^{2+} to $[Hg_2]^{2+}$, and Ag^{+}, Pt^{++}, Pd^{++}, Se^{4+} and Te^{4+} to respective metals.

यह सर्वविदित है कि आक्सीकृत अपचित युग्मों के आक्सीकरण विभिव विभिन्न संकरक अभिकर्मकों की उपस्थिति में विभिन्न रूप से प्रभावित होते हैं। मानक आक्सीकरण अपचयन विभवों (E_0) के मान कम ऋणात्मक, या अधिक ऋणात्मक हो जाते हैं, और यह परिवर्तन आक्सीकृत तथा अपचित अवस्था में धात्विक आयन तथा समान लिगैंड से बने संकरों के आपेक्षिक स्थायित्व पर निर्भर है।

श्वार्जेनबाश[1] ने $[V(EDTA)]^{=}/[V(EDTA)]^{-}$, $[Fe(EDTA)]^{=}/[Fe(EDTA)]^{-}$ तथा $[Co(EDTA)]^{=}/[Co(EDTA)]^{-}$ युग्मों के (E_0) मानों का मापन किया है, तथा उसने देखा भी है कि ये मान M^{++}/M^{3+} युग्मों के (E_0) मानों की अपेक्षा कम ऋणात्मक हैं। इसके फलस्वरूप $EDTA$ की उपस्थिति में V^{++}, Fe^{++} तथा Co^{++}, सामान्य जलीय विलयनों की अपेक्षा प्रबल अपचयक होंगे। प्रिबिल[2] ने देखा कि $EDTA$ की उपस्थिति में फेरस आयन आयोडीन को अपचित कर

देता है, जब कि साधारणतः फेरिक आयन आयोडाइड विलयनों को आक्सीकृत करके आयोडीन मुक्त करता है। गोपालराव[3] ने भी फास्फोरिक अम्ल की उपस्थिति में फेरस आयन के द्वारा कुछ नये पदार्थों $V(iv)$, $Mo(vi)$ को अपचित किया है।

फ्लुओराइड आयन[4] की उपस्थिति में भी Fe^{++}/Fe^{+++} युग्म के मानक आक्सीकरण-अपचयन विभव (E_0) का मान कम ऋणात्मक (—0.4 वोल्ट तक) हो जाता है। प्रस्तुत अध्ययन में इस तथ्य का उपयोग कुछ नवीन आक्सीकरण-अपचयन अभिक्रियाओं की खोज में किया गया है और सोडियम फ्लुओराइड की उपस्थिति में फेरस आयन के द्वारा कुछ ऐसे पदार्थों का अपचयन किया गया है, जो साधारणतः फेरस आयन से अपचित नहीं होते। प्रेक्षित अभिक्रियाएँ सारणी 1 में अंकित हैं।

सारणी 1

अपचित पदार्थ	अंतिम अवस्था	टिप्पणी
I_2	I^-	विलयन रंगहीन हो जाते हैं, परन्तु अभिक्रिया तभी पूर्ण होती है जब Fe^{++} की मात्रा अधिक हो। समअणुक मिश्रणों में 20-25% अभिक्रिया हो जाने पर साम्यावस्था आ जाती है।
Cu^{++}	Cu^+	अभिक्रिया मन्द है तथा इसमें पर्याप्त प्रेरण काल (Induction period) होता है। साधारण ताप पर कुछ समय के पश्चात् एक लाल अवक्षेप आता है।
Hg^{++}	$[Hg_2]^{++}$	अभिक्रिया मन्द है। गरम करने पर एक श्वेत अवक्षेप प्राप्त होता है।
Ag^+	Ag	अभिक्रिया तीव्र है तथा एक काला अवक्षेप प्राप्त होता है। Ag^+ केवल Fe^{++} के द्वारा भी अपचित हो जाता है, परन्तु यह अभिक्रिया मन्द होती है। फ्लुओराइड आयन इसे उत्प्रेरित करते हैं।
Pt^{++}	Pt	एक काला अवक्षेप प्राप्त होता है। अभिक्रिया पर्याप्त रूप से तीव्र है।
Pd^{++}	Pd	एक काला अवक्षेप प्राप्त होता है। अभिक्रिया तीव्र है।
Se^{4+}	Se	अभिक्रिया तीव्र है। तुरन्त एक लाल अवक्षेप प्राप्त होता है।
Te^{4+}	Te	अभिक्रिया मन्द है। काला अवक्षेप गरम करने पर मिलता है।

इस दिशा में कार्य आगे प्रगति पर है। इन अभिक्रियाओं का विस्तृत अध्ययन पूर्ण हो जाने पर प्रयोग-फल प्रकाशित किये जायेंगे।

निर्देश

1. श्वार्जनबाश, जी०। **हेल्व० किम० ऐक्टा,** 1949, **32,** 839।
   श्वार्जनबाश, जी०, तथा हेलर, एच०। **वही,** 1951, **34,** 576।
   श्वार्जनबाश, जी० तथा सैण्डरा, जे०। **वही,** 1953, **36,** 1089।
2. प्रिबिल, आर०, साइमन, वी०, तथा डोलेजल, जे०। **कलेक्शन जेक० केम० कम्यून्स०,** 1951, **16,** 573।
3. गोपालराव, जी० एवं राजूसागा, सीतारामा। **टैलेण्टा,** 1963, **10,** 169।
   गोपालराव, जी० और दीक्षितलू, एल० एस०ए०। **वही,** 1963, **10**, 295।
4. मोएलर, टी०। Inorganic chemistry, **एशिया पब्लिशिंग हाउस,** 1963, पृ० 332।

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10,** 11-16

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10,** 11-16

ट्रूसडेल F-समीकरणों को तुष्ट करने वाले समीकरणों की एक कोटि की मूल श्रेणी

बी० एम० अग्रवाल

गवर्नमेंट साइंस कालेज, ग्वालियर

[प्राप्त—नवम्बर 25, 1965]

सारांश

प्रस्तुत शोध निबन्ध में ट्रूसडेल F-समीकरणों को तुष्ट करने वाले समीकरण की मूलश्रेणी (3, p. 599) प्राप्त की गई है। हाइपरज्यामितीय फलनों का सामान्य प्रसरण निकाला गया है जिससे विशिष्ट दशाओं में जेरी तथा अन्यों के परिणाम [2, p. 390]प्राप्त हुये हैं।

इन परिणामों को प्राप्त करने के लिये प्रत्यक्ष विधि अपनाई गई है।

Abstract

Basic series corresponding to a class of functions satisfying the Truesdell F-equations. *By* B. M. Agrawal, Govt. Science College, Gwalior.

In this paper the basic series [3,p. 599] for the function satisfying the Truesdell F-equations have been obtained. A general expansion of hypergeometric functions in hypergeometric functions has been deduced, for example, which gives the results of Jerry and others [2, p. 390] in particular cases.

It needs mentioning the point that the induction method of these authors has been avoided and a direct method has been applied to deduce these results.

पीठिका—

माना कि $g_n(z)$ एक बहुपद है जिसका x में n कोटि है तो $\pi_{k, n}$ एक ऐसा अचर विद्यमान है कि

$$x^k = \sum_{n=0}^{[k]} \pi_{k, n}\, g_n(x) \tag{1}$$

यदि $F(z, a)$ F-समीकरण [5. p 15] की तुष्टि करता है

$$\frac{\partial F(z, a)}{\partial z}=F(z,a+1) \tag{2}$$

तो

$$F(\lambda z, a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k(z-z_0)^k}{k!}\phi(a+k) \tag{3}$$

जहाँ

$$\phi(a)=F(\lambda z_0, a)$$

तथा (3) में (1) के प्रतिस्थापन से

$$F(\lambda z, a)=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+n}\phi(a+k+n)}{(k+n)!}\pi_{k+n, n}\, g_n\left(\frac{z-z_0}{p}\right)\cdot p^{k+n} \tag{4}$$

प्राप्त होगा।

इसी प्रकार $Y(z, a)$ फलन जो $\frac{\partial y(z, a)}{\partial z}=y(z,a-1)$ फलन की तुष्टि करता है (5)

तो हमें $y(\lambda z,a)=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^{k+n}\phi(a-k-n)}{(k+n)!}\pi_{k+n,n}\, g\left(\frac{z-z_0}{p}\right)$

$\phi(a)=y(\lambda z_0, a)$ प्राप्त होगा। (6)

अब हम निम्नांकित परिणाम को सिद्ध करेंगे

$$x^k=\frac{(e_{mp})_k}{(f_{mq})_k}\sum_{n=0}^{k}\frac{(-k)_n(y+2k)}{(y)_{k+n+1}}g_n(x) \tag{7}$$

जहाँ

$$g_n(x)=\frac{(y)_n}{n!}F\left[\begin{matrix}-n, n+y, f_{mq}; x\\ e_{mp}\end{matrix}\right]$$

$$f_{mq}=(f_{11}\cdot f_{12}\cdots\cdots f_{1q_1})(f_{21}\cdot f_{22}\cdots\cdots,f_{2q2})\cdots\cdots,(f_{n1}\cdot f_{n2}\cdots f_{nq_n})$$

उपपत्ति

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)\,t^n=(1-t)^{-y}F\left[\begin{matrix}y/2,\ (y+1/2)\,f_{mq};\ \dfrac{-4xt}{(1-t)^2}\\ emp\end{matrix}\right]$$

तथा [4, p. 138] में दी विधि का अनुसरण करने पर

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y)_{2k}(f_{mq})_k\,x^k\,v^k}{2^{2k}\,(e_{mq})_k\,k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{[k]}\frac{(y)_{2k}(y+2n)(-k)_n\,g_n(x)v^k}{2^{2k}\,(y)_{k+n+1}\,k!}$$

जहाँ $$v=-4t/(1-t)^2$$

अब v^k के गुणांकों को एकत्र करने पर वांछित फल की प्राप्ति होती है।

उदाहरण

(1) माना कि

$$F(z,a)=\frac{\Gamma(g_{mr}+a)}{\Gamma(h_{ms}+a)}\,F\left[\begin{matrix}g_{mr}+a\\ h_{ms}+a\end{matrix}\ z\right]$$

यदि

$$z_0=0,\ p=1,\ \phi(a)=\Gamma(g_{mr}+a)/\Gamma(h_{ms}+a)$$

(5) में प्रतिस्थापन द्वारा

$$F\left[\begin{matrix}g_{mr}+a\\ h_{ms}+a\end{matrix};\lambda z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n(y)_n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+y)(\lambda)^k}{(y)_{2n+k+1}\,k!}$$

$$\frac{(e_{mp})_{k+n}(g_{mr}+a)_{k+n}}{(f_{mq})_{k+n}(h_{ms}+a)_{k+n}}\,F\left[\begin{matrix}-n,\ n+y,\ f_{mq}\\ e_{mp}\end{matrix}\ z\right]$$

$a=0$ रखने पर हमें

$$\sum_{1}^{m} rn\ F\sum_{1}^{m} s_n\left[\begin{matrix}g_{mr};\\ h_{ms}\end{matrix}\ \lambda z\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n(e_{mp})_n(g_{mr})_n}{n!\,(f_{mq})_n\,(h_{ms})_n\,(n+y)_n}$$

$$\sum_1^m p_n + \sum_1^m r_n F_1 + \sum_1^m q_n + \sum_1^m s_n \begin{bmatrix} e_{mp}+n, q_{mr}+n, \lambda \\ f_{nq}+n, h_{ms}+n, 2n+y+1 \end{bmatrix}$$

$$2+\sum_1^m q_n F \sum_1^m p_n \begin{bmatrix} -n, n+y, f_{mq} ; z \\ e_{mp} \end{bmatrix} \tag{8}$$

प्राप्त होगा।

विशिष्ट दशायें

(A) $m=2 ; r_1=r ; s_1=s ; q_1=q ; p_1=p$

$r_2=t \quad s_2=u \quad q_2=r \quad p_2=s$

$g_r=f_r ; e_s=h_s$

तो हमें [2, p. 394] प्राप्त होगा।

(B) $m=2 ; r_1=r ; s_1=s ; q_1=p_1 ; p_1=2+p_1$

$r_2=p \quad s_2=q \quad q_2=r \quad p_2=s$

${}^e p_1+2=\alpha . \beta . f p_1$

$g_r=f_r ; e_s=h_s$

तो हमें [2, p. 390] प्राप्त होगा।

(2) माना कि

$$y(z, \alpha)=\frac{z^{c+\alpha-1}}{\Gamma(c+\alpha)}\, {}_2F_1\begin{bmatrix} a, b : z \\ c+\alpha \end{bmatrix}$$

यदि $\lambda z_0=1$

$$\phi(\alpha)=\frac{\Gamma(c+\alpha-a-b)}{\Gamma(c+\alpha-a)\, \Gamma(c+\alpha-b)}$$

(6) से हमें

$$\frac{(\lambda z)^{c+\alpha+1}}{\Gamma(c+\alpha)}\, {}_2F_1\begin{bmatrix} a, b ; \lambda z \\ c+\alpha \end{bmatrix}=\sum_{n, k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^{k+n}\, \Gamma(c+\alpha-a-b-n-k)}{(k+n)!\, \Gamma(c+\alpha-a-n-k)}$$

$$\frac{(e_{mp})_{k+n}(-k-n)_n(y+2-k+2n)}{\Gamma(c+a-b-n-k)(f_{mq})_{k+n}(y)_{k+2n+1}}$$

$$\frac{(y)_n}{n!}F\left[\begin{matrix}-n, n+y, f_{mq} \\ e_{mp}\end{matrix}; \frac{\lambda z-1}{\lambda p}\right]$$

प्राप्त होगा।

$a=0$ रखने पर हमें

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a, b; \lambda z \\ c\end{matrix}\right]=\frac{(\lambda z)^{-c+1}\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^n}{n!}$$

$$\frac{(1+a-c)_n(1+b-c)_n(e_{mp})_n}{(1+a+b-c)_n(f_{mq})_n(y+n)_n}F\left[\begin{matrix}1+a-c+n, 1+b-c+n, e_{mp}+n;-\lambda p \\ 1+a+b-c+n, 2n+y+1, f_{mq}+n,\end{matrix}\right]$$

$$F\left[\begin{matrix}-n, n+y, f_{mq} \\ e_{mp}\end{matrix}; \frac{\lambda z-1}{\lambda p}\right] \qquad (9)$$

प्राप्त होगा।

यदि $m=1$; $e_p=(1+\alpha)f_q$; $y=1+\alpha+\beta$; $\lambda p=-1$ तथा $\lambda z=x$ तो विशिष्ट दशा

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a_1\ b; x \\ c\end{matrix}\right]=\frac{(x)^{-c+1}\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-u)\,\Gamma(c-a)}\sum_{n+0}^{\infty}\frac{(-)^n(1+a-c_n}{(1+a+b-c)_n}$$

$$\frac{(1+b-c)_n}{(1+\alpha+\beta+n)_n}\;{}_3F_2\left[\begin{matrix}1+a-c+n, 1+b-c+n, 1+\alpha+n \\ 1+a+b-c+n, 2n+2+\alpha+\beta\end{matrix}\; 1\right]$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(2x-1)$$

प्राप्त होगी।

(3) माना कि

$$y(z, a)=\frac{\Gamma(1+a+b+m-\alpha)}{\Gamma(1+a+m)}2^{\alpha}\,P_{m+\alpha}^{a-\alpha,\, b-\alpha}(z)$$

यदि $\lambda z_0 = 1$

$$\phi(a) = \frac{2^{\alpha}\, \Gamma(1+a+b+m-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+m)\, \Gamma(1+a-\alpha)}$$

इसी प्रकार (6) में $\alpha = 0$ रखने पर

$$P_m^{a,b}(\lambda z) = \frac{(1+a)_m}{m!} \sum_{n=0}^{[m]} \frac{\left(\frac{\lambda p}{2}\right)^n (1+a+b+m)_n(-m)_n(e_{mp})_n}{(1+a)_n(n+y)_n(f_{nq})_n\, n!}$$

$$F\begin{bmatrix} 1+a+b+m+n,\ -m+n,\ e_{mp}+n,\ -\lambda p/2 \\ 1+a+n,\ 2n+y+1,\ f_{mq}+n \end{bmatrix}$$

$$F\begin{bmatrix} -n,\ n+y, f_{mq};\ \lambda z - 1/p\lambda \\ e_{mp} \end{bmatrix}$$

यदि $m=1,\ e_p = (1+\alpha) f_q;\ y = 1+\alpha+\beta,\ \lambda p = -2$
तथा x द्वारा $z\lambda$ को प्रतिस्थापित करने पर हमें ज्ञात परिणाम [1,(5)] प्राप्त होगा।

$$P_m^{a,b}(x) = \frac{(1+a)_m}{m!} \sum_{n=0}^{[m]} \frac{(-)^n(1+a+b+m)_n(-m)_n}{(1+a)_n(n+1+\alpha+\beta)_n}$$

$${}_3F_2\begin{bmatrix} 1+a+b+m+n,\ -m+n,\ 1+\alpha & \\ 1+a+n,\ 2n+\alpha+\beta+2, & 1 \end{bmatrix} P_n^{\alpha,\beta}(x)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध निबन्ध की तैयारी में डा० बी० आर० भोंसले ने जो सहायता पहुँचाई उसके लिये लेखक उनका कृतज्ञ है।

निर्देश

1. अल सलम, डब्लू० ए०। पोर्चु० मैथ०, 1956, **15**, 3।
2. जेरी, एल० फील्ड्स तथा जेट विम्प। मैथ० काम्प०, 1961, **15**, (76)।
3. वही। प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०, 1963, 599-605।
4. रेनविले, ई० डी०। Special Functions, न्यूयार्क 1963।
5. ट्रुसडेल, सी० "A unified theory of special functions," प्रिंसटन, 1948।

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 17-23

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 17-23

उत्तर प्रदेश की मिट्टियों में सूक्ष्ममात्रिक तत्व

शिवगोपाल मिश्र, रमेश चन्द्र तिवारी, प्रेमचन्द्र मिश्र तथा केशवाचार्य मिश्र

कृषि रसायन, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जुलाई 10, 1966]

सारांश

प्रस्तुत शोध निबन्ध में उत्तर प्रदेश के तीन प्रमुख मिट्टी (काली, लाल तथा क्षारकीय) समूहों में मैंगनीज तथा मालिब्डनम तत्वों की उपस्थिति सूचित की गई है। काली मिट्टियों में मैंगनीज की मात्रा क्षारकीय मिट्टियों से अधिक पाई गई है परन्तु लाल मिट्टियों में यह लगभग समान मात्रा में उपस्थित है। प्राप्त परिणामों से यह स्पष्ट है कि तीनों मिट्टियों के नमूनों में विनिमेय तथा अपचेय मैंगनीज भी पाया जाता है। लाल मिट्टी में विनिमेय मैंगनीज अधिक होता है जबकि अपचेय अवस्था में मैंगनीज काली मिट्टी में सबसे अधिक उपस्थित है। यह भी पता चला है कि सभी मिट्टियों में मॉलिब्डनम की अपेक्षा मैंगनीज कई गुना अधिक मात्रा में उपस्थित है।

Abstract

Trace elements in soils of Uttar Pradesh. *By* S. G. Misra, R. C. Tiwari, P. C. Misra and K. C. Misra, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, U. P. (India).

In the present paper the presence of manganese and molybdenum in three important soil groups of Uttar Pradesh has been reported. The groups of soils studied were the black soils, the red soils and the alkali soils. A number of soil samples were analysed for the contents of total and exchangeable forms of the two trace elements —manganese and molybdenum. The red soils have been found to be well supplied with exchangeable form of manganese while the black soils are rich in reducible form. The manganese content of these soils is many times greater than the content of molybdenum.

No definite relation could be established between the active molybdenum content and pH, total carbonates and total carbon in soils.

विश्व के तमाम भागों की विभिन्नमृदाओं में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की न्यूनता की सूचना उपलब्ध है। क्षारकीय, अम्लीय, अत्यधिक चूनाधारी तथा अपरदित, एवं बलुई और पीट मिट्टियों में उगाये जाने वाली खाद्यान्न फसलें एवं फलों के पौधों में सूक्षमत्रिक तत्वों के **न्यूनता-रोग** (deficiency diseases) स्पष्ट दृष्टिगोचर होते हैं। गहन कृषि के लिये प्रयुक्त नाइट्रोजन, फास्फोरस तथा पोटैशी उर्वरकों के अतिरिक्त पौधों में उत्पन्न न्यूनता रोगों का एकमात्र कारण सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का भूमि में अभाव ही है। अतः इन तत्वों का अध्ययन शोध का अत्यन्त आवश्यक विषय है। विदेशों में इस दिशा में अत्यधिक कार्य किया जा चुका है परन्तु भारतीय मिट्टियों के सम्बन्ध में इस दिशा में बहुत कम ध्यान दिया गया है।

विगत कुछ वर्षों में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के अध्ययन की ओर भारत के इने-गिने कृषि वैज्ञानिकों ने कुछ कार्य किया है। **रणधवा** एवं **सहयोगी**[1], **कांवर तथा सिंह**[2] तथा **भुम्बला और धिंगरा**[3] ने पंजाब की कुछ मिट्टियों में बोरन, जस्ता (जिंक), लोहा, तांबा और मैंगनीज की मात्राओं का निर्धारण किया है। इसी प्रकार गुजरात की कुछ मृदाओं के सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की मात्रा का निश्चयन **मेहता**[4] तथा उनके सहयोगियों ने किया है। राजस्थान तथा मध्य प्रदेश के मख्य मिट्टी-समूहों में मैंगनीज की मात्रा का निर्धारण क्रमशः **सक्सेना एवं बसीर**[5] तथा **शर्मा एवं मोतीरमानी**[6] ने किया है। बिहार की मिट्टियों में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों से सम्बन्धित एक शोधपत्र **झा**[7] ने प्रकाशित किया है। उत्तर प्रदेश की मिट्टियों पर इस दिशा में कोई महत्त्वपूर्ण कार्य नहीं हुआ है। **यादव** तथा **कालरा**[8] ने कुछ पर्वतीय क्षेत्र की मिट्टियों में मैंगनीज की मात्रा का पता लगाया है।

प्रस्तुत शोध पत्र में कुछ लाल, काली एवं क्षारकीय मिट्टियों में उपस्थित मैंगनीज (पूर्ण विनिमेय एवं अपचेय) तथा मालिब्डनम की मात्राओं का विस्तृत अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। इन मिट्टियों से विभिन्न प्रकार के पौधों द्वारा ग्रहीत मैंगनीज तथा मालिब्डनम की मात्राओं का पता लगाने के लिए प्रयोग किये जा रहे हैं।

प्रयोगात्मक

अध्ययन में प्रयुक्त मिट्टियों के नमूनों को विभिन्न क्षेत्रों से लाकर उन्हें सुखाकर, पीसकर एवं चाल कर फिर ऊष्मक में सुखा करके स्वच्छ काँच की बोतलों में संग्रहीत किया गया।

इन मिट्टियों का पहले तो पी-एच०, कार्बोनेट तथा कार्बनिक पदार्थों के लिए विश्लेषण किया गया। तत्पश्चात् उनमें मैंगनीज एवं मालिब्डनम की मात्रा ज्ञात की गई। सम्पूर्ण मैंगनीज का निर्धारण परआयोडेट विधि से किया गया।[9] विनिमेय मैंगनीज के लिए मिट्टी को उदासीन नार्मल अमोनियम ऐसीटेट से निक्षालित किया गया तथा अपचेय अवस्था के मैंगनीज को लिए **हाइड्रोक्विनोन** विधि का प्रयोग किया गया है।

सम्पूर्ण मालिब्डनम का निश्चयन पोटैशियम थायोसायनेट से रंग विकसित करके रंगमापी विधि द्वारा[10] किया गया तथा विनिमेय अवस्था का पता मिट्टी को उदासीन नार्मल अमोनियम ऐसीटेट से निक्षालित करके किया गया।

प्राप्त आँकड़ों को सारणी 1-3 प्रस्तुत किया गया है।

सारणी 1

मिट्टियों का रासायनिक विश्लेषण

मिट्टी का नाम		पी-एच०	% कार्बनिक कार्बन	% कैल्सियम कार्बोनेट
काली				
बलिया न०	1	7·25	0·35	1.92
	2	7·50	0·42	2·15
	3	9·00	0·29	2·03
बिरहा न०	1	8·10	0·32	0·22
	2	8·20	0·28	0·17
	3	8·30	0·32	0·18
	4	8·40	0·28	0·42
गैपुरा न०	1	8·3	0·45	0·77
	2	8·3	0·38	0·63
	3	8·3	0·38	0·78
	4	8·4	0·40	0·78
लाल				
खंतरा न०	1	8·25	0·29	
	2	7·0	0·32	
	3	6·8	0·20	
क्षारकीय				
सोरांव न०	1	9·0	0·08	18·0
	2	7·9	0·58	10·0
	3	9·0	0·24	11·0
	4	9·3	0·26	11.5
कटोघन न०	1	7·5	0·21	7·25
	2	10·0	0·17	17·25
	3	10·0	0·84	12·50

सारणी 2

मिट्टियों में मैंगनीज व मालिब्डनम की मात्रा
भाग प्रति दस लाख भाग (p pm) मिट्टी में

मिट्टी		मैंगनीज (ppm)			मालिब्डनम (ppm)	
		पूर्ण	अपचेय	विनिमेय	पूर्ण	विनिमेय
काली						
बलिया न०	1	725	250	175	9·0	4·05
	2	900	238	210	8·5	3·63
	3	1050	244	200	4·5	3·80
बिरहा न०	1	740	316	अनुपस्थित	3·00	1·0
	2	710	172	—	9·38	4·43
	3	510	130	—	8·50	2·43
	4	600	136	4	7·50	2·30
गैपुरा न०	1	860	192	628	18·13	1·4
	2	780	224	86	9·38	0·9
	3	790	244	30	19·30	1·20
	4	940	236	20	7·50	1·23
लाल						
खंतरा न०.	1	400	60	100	6·50	2·13
	2	650	87·5	100	22·75	3·13
	3	632	70·5	114	—	—
क्षारकीय						
सोरांव न०.	1	615	260	3	—	3·01
	2	285	51	—	—	2·43
	3	310	78	4	—	1·98
कटोघन न०	1	330	7	अनुपस्थित	—	—
	2	370	7	4	—	—
	3	360	15	अनुपस्थित	—	—

सारणी 3

मिट्टियों के पी-एच, कार्बोनेट तथा कार्बनिक कार्बन एवं सक्रिय मैंगनीज तथा विनिमेय मालिब्डनम में सम्बन्ध

मिट्टी	नमूनों की संख्या	पी-एच० परास	% कार्बोनेट परास	% कार्बनिक कार्बन परास	सक्रिय* मैंगनीज (ppm)	विनिमेय मालिब्डनम (ppm)
काली	11	7·25-9·0	0·17-2·15	0·28-0·42	130-820	0·9-4·43
लाल	3	6·8-8·25	—	0·20-0·32	160-187·5	2·13-3·13
क्षारकीय	7	7·9-10·0	10—18	0·08-0·84	7-263	1·98-3·01

*सक्रिय मैंगनीज = (विनिमेय + अपचेय) मैंगनीज

(active Mn) = $(E_{Mn}) + (R_{Mn})$

परिणाम एवं विवेचना

सारणी २ में प्रस्तुत परिणामों से यह स्पष्ट है कि काली मिट्टियों में पूर्ण मैंगनीज की मात्रा लाल तथा क्षारकीय मिट्टियों की अपेक्षा अधिक है। लाल तथा क्षारकीय मिट्टियों में यह मात्रा लगभग समान है। काली एवं लाल मिट्टियों में विनिमेय मैंगनीज क्षारकीय की अपेक्षा अधिक है। क्षारकीय भूमियों में तो यह कहीं कहीं अनुपस्थित भी है। यह ध्यान देने योग्य है कि सभी मिट्टियों में अपचेय मैंगनीज की मात्रा विनिमेय मैंगनीज की अपेक्षा अत्यधिक है।

इसके विपरीत तीनों मिट्टियों में पूर्ण मालिब्डनम की मात्रा मैंगनीज की तुलना में बहुत कम है। काली मिट्टी के 11 नमने में से सर्वाधिक मलिब्डनम गैपुरा से एकत्र किये गए नमूनों में देखा जाता है। विनिमेय मलिब्डनम पूर्ण मैंगनीज का 5 से 50% तक है। विनिमेय मैंगनीज की तुलना में यह मात्रा कहीं अधिक है।

यदि विनिमेय मैंगनीज तथा अपचेय मैंगनीज की मात्रा को सक्रिय मैंगनीज तथा विनिमेय मालिब्डनम को ही सक्रिय मालिब्डनम के रूप में अभिहित किया जाय और फिर इनका सम्बन्ध पी-एच०, कार्बोनेट %, कार्बनिक कार्बन से ढूंढा जाय तो निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होंगे :

(1) अधिक कैल्सियम कार्बोनेट (विशेषतः विलेय कार्बोनेट) होने से क्षारकीय मिट्टियों में सक्रिय मैंगनीज की मात्रा अत्यन्त न्यून है। काली मिट्टियों के नमूनों में थोड़ा कैल्सियम कार्बोनेट है अतः उनमें सक्रिय मैंगनीज की मात्रा अधिक है। लाल मिट्टियों में कार्बोनेट अनुपस्थित है किन्तु फिर भी सक्रिय मैंगनीज की मात्रा कम ही है।

(2) काली मिट्टियों में अन्य मिट्टियों की अपेक्षा अधिक कार्बन है अतः उनमें अधिक सक्रिय मैंगनीज का सीधा सम्बन्ध कार्बनिक कार्बन से जोड़ा जा सकता है किन्तु यह ध्यान देने योग्य है कि क्षारीय मिट्टियों में भी कार्बन की मात्रा पाई जाती है किन्तु उनमें सक्रिय मैंगनीज अपेक्षतया कम है।

(3) क्षारीय मिट्टियों का पी-एच० अत्यधिक क्षारीय (केवल दो नमूनों के अतिरिक्त) है अतः उनमें कम सक्रिय मैंगनीज होने के कारण यह कहा जा सकता है कि उच्चतर पी-एच० पर सक्रिय मैंगनीज की मात्रा घटती जाती है। काली मिट्टी का पी-एच० 7·25 तथा 8·4 के बीच में है और इसके नमूनों में प्रचुर सक्रिय मैंगनीज है। लाल मिट्टी का पी-एच० 6·8 से 8·25 के बीच में है।

सक्रिय मालिब्डनम का सम्बन्ध उपर्युक्त कारणों में से एक के भी साथ ठीक से पुष्ट नहीं होता।

अतः स्पष्ट है विभिन्न प्रकार की मिट्टियों में मैंगनीज तथा मालिब्डनम की उपलब्धि समान कारणों पर निर्भर नहीं करती।

इस दिशा में आगे कार्य हो रहा है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से डा० रमेशचन्द्र तिवारी नेशनल इंस्टीच्यूट आफ साइंस, दिल्ली के प्रति आर्थिक सहायता प्रदान करने के लिए आभारी हैं।

निर्देश

1. रणधवा, एन० एस०, कांवर जे० एस० तथा निझावन एस० डी०। **सॉयल साइंस**, 1961, **92**, 106।

2. काँवर, जे० एस० तथा सिंह एस० एस०। **सॉयल साइंस**, 1961, **92**, 207।

3. भुम्बला, डी० आर० तथा धिंगरा डी० आर०। **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 255।

4. मेहता, बी० वी० तथा सहयोगी। **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 329।

5. सक्सेना, एस० एन० तथा बसीर बी० एल०। **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 399।

6. शर्मा, एस० जी० तथा मोतीरमानी, डी० पी०। — **जर्न० इन्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 249।

7. झा, के० के०। — **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 235।

8. यादव, जे० एस० पी० तथा कालरा, के० के०। — **जर्न० इण्डि० सोसा० सॉयल साइंस**, 1964, **12**, 225।

9. जैक्सन, एम० एल०। — Soil Chemical Analysis, **एशिया पब्लिशिंग हाउस प्रथम संस्करण**, 1962, पृ० 394-396।

10. जैक्सन एम० एल० — **वही**।

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 25-36

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 25-36

बेसिल फलन तथा माइजर G-फलन वाला समाकल—III

एच० बी० मल्लू

गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मई 30, 1966]

सारांश

प्रस्तुत निबन्ध का उद्देश्य स्टाइल्जे तथा माइजर के परिवर्तों की सहायता से ऐसे समाकल का मान ज्ञात करना है जिसमें बेसेल फलन तथा माइजर के G फलन हों। इस प्रकार से प्राप्त परिणाम लेखक द्वारा पूर्व सूचित परिणामों को व्यापक बनाते हैं।

Abstract

An integral involving products of Bessel function and Meijer's G-function. III. *By* H. B. Malloo, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur, Rajsthan, India.

The object of this paper is to evaluate an integral involving products of Bessel function and Meijer's G-function with the help of a theorem on Stieltjes and Meijer transforms. The results obtained in this paper generalize some of the results recently given by the author.[5]

1. विषय प्रवेश :—माइजर परिवर्त

$$\phi(p)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\, p \int_0^\infty (pt)^{1/2} K_\nu(pt)\, f(t)\, dt \tag{1}$$

तथा स्टाइल्जे परिवर्त

$$\psi(p)=p \int_0^\infty (p+t)^{-1} f(t)\, dt \tag{2}$$

को क्रमशः संकेत के रूप में निम्नांकित प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$\phi(p)\overset{K}{\underset{\nu}{=}}f(t) \text{ तथा } \psi(p)\overset{s}{\underset{s}{=}}f(t).$$

2. प्रमेय: यदि

$$\psi(p)\overset{s}{\underset{s}{=}}f(t^{1/2}) \tag{3}$$

तथा

$$\phi(p)\overset{K}{\underset{\nu}{=}}t^{\nu-\mu+2n+1/2}\, I_\mu(at)\, f(t) \tag{4}$$

तब

$$\phi(p)=\frac{p^{3/2}}{(-1)^n\pi^{1/2}2^{3/2}}\int_0^\infty t^{\nu/2-\mu/2+n-1}\,\mathcal{J}_\mu(at^{1/2})\,\mathcal{J}_\nu(pt^{1/2})\,\psi(t)\,dt \tag{5}$$

यदि समाकल अभिसारी हो $\quad p>a>0,\ R(1+\nu+n)>0$

तथा $\quad R(\mu-\nu+2-2n)>0,\ n=0, 1, 2, \ldots.$

उपपत्ति:—क्रियात्मक कलन के सार्वीकृत पार्सेवाल-गोल्डस्टीन प्रमेय (6) को (3) तथा [3, p. 227(26) में व्यवहृत करने पर

$$2(-1)^n p^{\nu/2-\mu/2+n+1}\, I_\mu(ap^{1/2})\, K_\nu(bp^{1/2})$$

$$\overset{s}{\underset{s}{=}}t^{\nu/2-\mu/2+n}\,\mathcal{J}_\mu(at^{1/2})\,\mathcal{J}_\nu(bt^{1/2})$$

$$R(1+\nu+n)>0,\ R(\mu-\nu+2-2n)>0,\ |\arg p|<\pi,$$

$$b>a>0,\ n=0, 1, 2, \ldots.$$

हमें

$$\int_0^\infty t^{\nu/2-\mu/2+n}\, I_\mu(at^{1/2})\, K_\nu(bt^{1/2})\, f(t^{1/2})\, dt$$

$$=\frac{1}{2(-1^n)}\int_0^\infty t^{\nu/2-\mu/2+n-1}\,\mathcal{J}_\mu(at^{1/2})\,\mathcal{J}_\nu(bt^{1/2})\,\psi(t)\,dt$$

प्राप्त होता है। अब समाकल में बाईं ओर t को x^2 द्वारा तथा b को p द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा इसे (4) के अनुसार विवेचित करने पर (5) परिणाम प्राप्त होता है।

3. **उपयोग** :—इस प्रमेय को हम उपयुक्त उदाहरण लेकर स्पष्ट करेंगे। हम [3, p. 418] को लेंगे।

$$f(t^{1/2})=t^{\rho/2-1}\, G_{q,\,s}^{l,\,m}\left(\frac{4}{b^2 t}\middle|\begin{matrix}b_1, \dots b_q\\ a_1 \dots a_s\end{matrix}\right)$$

$$\underset{s}{\overset{s}{=}} p^{\rho/2}\, G_{s+1,\,q+1}^{m+1,\,l+1}\left(\frac{b^2 p}{4}\middle|\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\rho, 1-a_1 \dots 1-a_s\\ 1-\frac{1}{2}\rho, 1-b_1 \dots 1-b_q\end{matrix}\right)$$

$=\psi(p)$, यदि $q+s<2(m+l)$, $|\arg b|<(m+l-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}s)\pi/2$,

$|\arg p|<\pi$, $R(\rho-2-2a_i)<0$, $(i=1, 2, \dots l)$,

$R(\rho+2-2b_j)>0$, $(j=1, 2, \dots m)$.

तो हमें [7, p. 365(3·4)] प्राप्त होगा

$$t^{\nu-\mu+2n+1/2}\, I_\mu(at) f(t)$$

$$=t^{\rho+\nu-\mu+2n-3/2}\, I_\mu(at) G_{q,\,s}^{l,\,m}\left(\frac{4}{b^2 t^2}\middle|\begin{matrix}b_1 \dots b_q\\ a_1 \dots a_s\end{matrix}\right)$$

$$\underset{\nu}{\overset{K}{=}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^{\rho+\nu-\mu+2n-3/2}\, a^{\mu+2r}}{\pi^{1/2}\, r!\, \Gamma(1+\mu+r)\, p^{\rho+\nu+2n-3/2+2r}}$$

$$\times G_{q,\,s+2}^{l+2,\,m}\left(\frac{p^2}{b^2}\middle|\begin{matrix}b_1 \dots b_q\\ (\rho+2\nu+2n)/2+r,\ (\rho+2n)/2+r,\ a_1 \dots a_s\end{matrix}\right)$$

$=\phi(p)$, यदि $q+s<2(m+l)$, $|\arg b|<(m+l-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}s)\pi/2, p>a>0$,

$R(\rho+2\nu+2n-2b_j+2)>0$, $R(\rho+2n+2-2b_j)>0$, $(j=1, 2, \dots m)$

अतः t के स्थान पर t^2 रखने से प्रमेय से निम्नांकित परिणाम मिलेगा

$$\int_0^\infty t^{\rho+\nu-\mu+2n-1}\, \mathcal{J}_\mu(at)\, \mathcal{J}_\nu(pt)\, G_{s+1,\,q+1}^{m+1,\,l+1}\left(\frac{b^2 t^2}{4}\middle|\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\rho, 1-a_1 \dots 1-a_s\\ 1-\frac{1}{2}\rho, 1-b_1 \dots 1-b_q\end{matrix}\right) dt$$

$$=(-1)^n\, 2^{\rho+\nu-\mu+2n-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^{\mu+2r}}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)\, p^{\rho+\nu+2n+2r}}$$

$$\times G_{q,\, s+2}^{l+2,\, m}\left(\frac{p^2}{b^2}\Big|{b_1 \ldots\ldots b_q \atop (\rho+2\nu+2n)/2+r,\ (\rho+2n)/2+r,\ a_1 \ldots a_s}\right). \qquad (6)$$

यदि $q+s<2(m+l+1)$, $|\arg b|<(m+l+1-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}s)\pi/2$, $p>a>0$,

$R(\rho+\nu-\mu+2n-2-2a_i)<0$, $(i=1, 2, \ldots l)$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

$R(\nu-\mu+2n-2)<0$, $R(1+\nu+n)>0$,

$R(\rho+2\nu+2n+2-2b_j)>0$, $(j=1, 2, \ldots m)$

तथा यदि $q+s\leqslant 2(m+l+1)$, $|\arg b|\leqslant(m+l+1-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}s)\pi/2$, $p>a>0$,

$R(\rho+\nu-\mu+2n-2-2a_i)<0$, $(i=1, 2, \ldots l)$,

$R(\nu-\mu+2n-2)<0$, $R(1+\nu+n)>0$, $n=0, 1, 2\ldots$,

$R(\rho+2\nu+2n+2-2b_j)>0$, $(j=1, 2, \ldots m)$,

$$R\left[2\sum_{1}^{s}(a_i)-2\sum_{1}^{q}(b_j)+(q-s)(\rho+\nu-\mu+2n)-1\right]<0$$

यदि हम $\mu=\nu$ तथा $n=0$ रखें तो लेखक का परिणाम [5] प्राप्त होगा।

विशिष्ट दशायें :

(i) यदि $m=2$, $l=0$, $s=1$, $q=3$, $a_1=\frac{1}{2}\rho$, $\mu_1=1-\frac{1}{2}\sigma$, $b_2=1+\frac{1}{2}\sigma$, $b_3=\frac{1}{2}\rho$, तो

$$G_{0\,2}^{2\,0}\left(\frac{x^2}{4}\Big|{\atop \frac{1}{2}\sigma,\ -\frac{1}{2}\sigma}\right)=2K_\sigma(x)$$

का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{\rho+\nu-\mu+2n-1} J_\mu(at)\, J_\nu(pt)\, K_\sigma(bt)\, dt$$

$$=(-1)^n\, 2^{\rho+\nu-\mu+2n-2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^{\mu+2r}}{r!\ \Gamma(1+\mu+r)\ p^{\rho+\nu+2n+2r}}$$

$$\times G_{33}^{22}\left(\frac{p^2}{b^2}\middle|\begin{matrix}1-\frac{1}{2}\sigma,\ 1+\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\rho\\ (\rho+2\nu+2n)/2+r,\ (\rho+2n)/2+r,\ \frac{1}{2}\rho\end{matrix}\right)$$

यदि $\quad R(\rho+2\nu+2n\pm\sigma)>0, R(b)>0,\ p>a>0, n=0, 1, 2\ldots.$

प्राप्त होगा। इसके बाद [4, p. 208(6)] का प्रयोग करने पर

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F_4(a, b;\ c, d;\ x, y)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+r)\Gamma(b+r)x^r}{r!\,\Gamma(c+r)}\ {}_2F_1(a+r, b+r;\ d;\ y) \tag{7}$$

$$F_4(a, b;\ c, d;\ x, y)$$

$$=\frac{\Gamma(d)\ \Gamma(b-a)}{\Gamma(d-a)\ \Gamma(b)}\ (-y)^{-a} F_4\left(a,\ a+1-d;\ c,\ a+1-b;\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

$$+\ \frac{\Gamma(a)\ \Gamma(a-b)}{\Gamma(d-b)\ \Gamma(a)}\ (-y)^{-b} F_4\left(b+1-d, b;\ c, b+1-a;\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

तथा [4, p. 3] हमें बेली का परिणाम [1, p. 38] प्राप्त होगा।

(*ii*) यदि $l=1, m=3, s=2, q=4, b_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda, b_2=1-\frac{1}{2}\sigma, b_3=1+\frac{1}{2}\sigma,$ $b_4=\frac{1}{2}\rho,\ a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\ a_2=\frac{1}{2}\rho$

तो

$$G_{13}^{31}\left(\frac{x^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{2}\sigma,\ -\frac{1}{2}\sigma\end{matrix}\right)=2^{1-\lambda}\,\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\sigma}{2}\right) s_{\lambda,\,\sigma}(x)$$

का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{\rho+\nu-\mu+2n-1} \mathcal{J}_\mu(at)\, \mathcal{J}_\nu(pt)\, s_{\lambda,\sigma}(bt)\, dt$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\nu-\mu+\lambda+2n-2}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\sigma}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{a^{\mu+2r}}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)\,p^{\rho+\nu+2n+2r}}$$

$$\times G_{4\,4}^{3\,3}\left(\frac{p^2}{b^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\ 1-\frac{1}{2}\sigma,\ 1+\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\rho\\ (\rho+2\nu+2n)/2+r,\ (\rho+2n)/2+r,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{2}\rho\end{matrix}\right) \qquad (9)$$

यदि $R(\rho+2\nu+2n+\lambda+1)>0,\ R(\rho+2\nu+2n\pm\sigma)>0,\ p>a>0,$ $R(\rho+v+2n+\lambda-\mu+3)<0,\ |\arg b|<\pi/2,\ n=0,\ 1,\ 2\ \ldots\,.$

यदि $\rho=1-\lambda$ तो [4, p. 208(6)] तथा (7) के द्वारा इस परिणाम को

$$\int_0^\infty t^{-\lambda+\nu-\mu+2n} \mathcal{J}_\mu(at)\, \mathcal{J}_\nu(pt)\, s_{\lambda,\sigma}(bt)\, dt$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2^{\nu-\mu+2n-1}\, a^\mu}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\sigma}{2}\right)}$$

$$\sum_{\sigma,-\sigma}^{\infty}\frac{\Gamma(-\sigma)b^\sigma\,\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\sigma+2n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\sigma+2\nu+2n}{2}\right)}{\Gamma(1+\mu)\,p^{\nu-\lambda+\sigma+1+2n}}$$

$$\times F_4\left(\frac{1-\lambda+\sigma+2n}{2},\frac{1-\lambda+\sigma+2\nu+2n}{2};1+\mu,1+\sigma;\frac{a^2}{p^2},\frac{b^2}{p^2}\right) \qquad (10)$$

यदि $R(1-\lambda\pm\sigma+2n)>0,\ R(1-\lambda\pm\alpha+2\nu+2n)>0,\ |\arg b|<\pi/2, p>a>0,$ $n=0,\ 1,\ 2\ldots.$ में परिणत किया जा सकता है।

(*iii*) यदि $l=0,\ s=0,\ m=1,\ q=2,\ \rho=2,\ b_1=\alpha,\ b_2=\beta$

तो [4, p.208(6)] तथा (7) का प्रयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{\nu-\mu+2n+1} \mathcal{J}_\mu(at)\, \mathcal{J}_\nu(pt)\ G_{1\,3}^{2\,1}\left(\frac{b^2t^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ 0,\ 1-\alpha,\ 1-\beta\end{matrix}\right) dt$$

$$=\frac{(-1)^n 2^{\nu-\mu+2n+1} a^{\mu} \Gamma(\nu-\alpha+n+2)\,\Gamma(2-\alpha+n)}{b^{2\alpha-2}\, p^{\nu-2\alpha+2n+4}\,\Gamma(1+\beta-\alpha)\,\Gamma(1+\mu)}$$

$$\times F_4\left(\nu-\alpha+n+2,\, 2-\alpha+n;\, 1+\mu,\; 1+\beta-\alpha;\, \frac{a^2}{p^2}, -\frac{b^2}{p^2}\right) \qquad (11)$$

क्योंकि $\quad R(\nu-\mu+2n-2)<0,\ R(1+\nu+n)>0,\ R(\nu+n+2-\alpha)>0,$

$|\arg b|<\pi/2,\ p>a>0,\ n=0, 1, 2 \ldots.$ प्राप्त होगा।

(iv) यदि $l=m=1,\ s=2,\ q=4,\ a_1=\frac{1}{2}\rho,\ b_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma,\ b_2=1+\frac{1}{2}\sigma,$

$b_3=1-\frac{1}{2}\sigma,\ b_4=\frac{1}{2}\rho..$ तो

$$G_{13}^{11}\left(\frac{x^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma,\ -\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma\end{matrix}\right)=H_\sigma(x)$$

तथा [4, p. 208(6)] का उपयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{\rho+\nu-\mu+2n-1} \mathcal{J}_\mu(at)\, \mathcal{J}_\nu(pt)\, H_\sigma(bt)\, dt$$

$$=\frac{(-1)^n\, 2^{\rho+\nu-\mu+2n}\, b^{\sigma+1}}{\pi^{1/2}\,\Gamma(\sigma+\frac{3}{2})\,\Gamma\left(\frac{1+\rho+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho-\sigma}{2}\right)}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^{\mu+2r}\,\Gamma\left(\frac{\rho+2\nu+2n+\sigma+1}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{\rho+2n+\sigma+1}{2}+r\right)}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)\, p^{\rho+\nu+\sigma+1+2n+2r}}$$

$$\times {}_3F_2\left(\frac{\rho+2\nu+\sigma+2n+1}{2}+r, \frac{\rho+\sigma+1+2n}{2}+r,\, 1;\, \frac{3}{2},\, \frac{3}{2}+\sigma;\, \frac{b^2}{p^2}\right) \qquad (12)$$

क्योंकि $\quad R(\rho+2n+\nu-\mu-5/2)<0,\ R(\rho+2n+\nu-\mu+\sigma-3)<0$

$\quad R(\rho+2n+2\nu+1+\sigma)>0,\ p>a>0,\ b>0,\ n=0, 1, 2 \ldots.$

प्राप्त होगा।

(v) यदि $l=0,\ m=s=2,\ q=4,\ a_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sigma,$

$a_2=\frac{1}{2}\rho,\ b_1=1+\frac{1}{2}\sigma,\ b_2=1-\frac{1}{2}\sigma,\ b_3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sigma,\ b_4=\frac{1}{2}\rho$

तो

$$G_{13}^{20}\left(\frac{x^2}{4}\middle|\begin{matrix}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma\\ -\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma,\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma\end{matrix}\right)=Y_\sigma(x)$$

[4, p. 208(6)] तथा (7) का प्रयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{\rho+\nu-\mu+2n-1}\, J_\mu(at)\, J_\nu(pt)\, Y_\sigma(bt)\, dt$$

$$=(-1)^n\, 2^{\rho+\nu-\mu+2n-1}\, a^\mu\, p^{-(\rho+\nu+2n)}\{\Gamma(1+\mu)\}^{-1}$$

$$\times\Bigg[\frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\rho+2\nu+2n-\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+2n-\sigma}{2}\right)b^{-\sigma}}{\Gamma(-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma\left(\frac{\rho-\sigma}{2}\right)\Gamma(1+\frac{1}{2}\sigma-\frac{1}{2}\rho)\,p^{-\sigma}}\,.$$

$$\times F_4\left(\frac{\rho+2\nu+2n-\sigma}{2},\frac{\rho+2n-\sigma}{2};1+\mu,\ 1-\sigma;\frac{a^2}{p^2},\frac{b^2}{p^2}\right)$$

$$+\frac{\Gamma(-\sigma)\,\Gamma\left(\frac{\rho+2\nu+2n+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+2n+\sigma}{2}\right)b^{\sigma}}{\Gamma(\frac{3}{2}+\sigma)\,\Gamma(1-\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}\sigma)\Gamma\left(\frac{\rho+\sigma}{2}\right)\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha)\,p^{\sigma}}$$

$$\times F_4\left(\frac{\rho+2\nu+\sigma+2n}{2},\frac{\rho+2n+\sigma}{2};1+\mu,\ 1+\sigma;\frac{a^2}{p^2},\frac{b^2}{p^2}\right)\Bigg] \tag{13}$$

प्राप्त होगा यदि

$R(\rho+2\nu+2n\pm\sigma)>0,\ R(\rho+\nu-\mu+2n-\frac{5}{2})<0,\ n=0,\ 1,\ 2\ldots$

$p>a>0,\ b>0.$

(*vi*) यदि $m=2,\ l=0,\ s=2,\ q=3,\ a_1=k,\ a_2=\frac{1}{2}\rho,\ b_1=\frac{1}{2}-m, b_2=\frac{1}{2}+m$ $b_3=\frac{1}{2}\rho,\ n=0.$ तथा t को $t^{1/2}$, b^2 को $4b$ तथा ρ को $2\rho-\nu+\mu$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हुये एवं

$$G_{12}^{20}\left(x \left| \begin{matrix} 1-k \\ \frac{1}{2}+m, \frac{1}{2}-m \end{matrix} \right. \right) = e^{-x/2} W_{k,m}(x)$$

के प्रयोग द्वारा हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होगा :—

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} J_\mu(at^{1/2}) J_\nu(pt^{1/2}) e^{-bt/2} W_{k,m}(bt)\, dt$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{2^{2\rho} a^{\mu+2r}}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)\, p^{2\rho+\mu+2r}}$$

$$\times G_{34}^{22}\left(\frac{p^2}{4b} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}-m, \frac{1}{2}+m, \rho+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \\ (2\rho+\mu+\nu)/2+r, (2\rho+\mu-\nu)/2+r, k, \rho+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right) \tag{14}$$

यदि $R(b)>0$, $p>a>0$, $R(\rho+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\pm m)>0$ तो $K=\frac{1}{2}-m$ रखने पर

तथा

$$W_{1/2-m,\, m}(x) = e^{-x/2} x^{1/2-m}.$$

सम्बन्ध का उपयोग करने पर हमें ρ के स्थान पर $\rho-\frac{1}{2}+m$ रखने पर

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} J_\rho(at^{1/2}) J_\nu(pt^{1/2})\, e^{-bt}\, dt$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{2^{2\rho+2m-1} a^{\mu+2r} b^{m-1/2}}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)\, p^{2\rho+2m+\mu-1+2r}}$$

$$\times G_{23}^{21}\left(\frac{p^2}{4b} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}+m, \rho-\frac{1}{2}+m+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \\ \frac{2\rho+2m-1+\mu+\nu}{2}+r, \frac{2\rho+2m-1+\mu-\nu}{2}+r, \rho-\frac{1}{2}+m+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \end{matrix} \right. \right) \tag{15}$$

प्राप्त होगा यदि

$$R\left(\rho+\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)>0,\ R(b)>0,\ p>a>0.$$

किन्तु [2, p. 187 (43)]

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} e^{-bt} \mathcal{J}_\mu(at^{1/2}) \mathcal{J}_\nu(pt^{1/2})\, dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\rho+\frac{\mu+\nu}{2}\right) b^{-[\rho+(\mu+\nu)]/2} a^\mu p^\nu}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\nu)\, 2^{\mu+\nu}} \psi_2\left(\rho+\frac{\mu+\nu}{2};\right.$$

$$\left. 1+\mu, 1+\nu; -\frac{a^2}{4b}, -\frac{p^2}{4b}\right) \qquad (16)$$

यदि $$R\left(\rho+\frac{\mu+\nu}{2}\right)>0,\ R(b)>0,\ p>a>0.$$

अतः इन दोनों परिणामों की तुलना करने पर

$$\psi_2\left(\rho+\frac{\mu+\nu}{2}; 1+\mu, 1+\nu; -\frac{a^2}{4b}, -\frac{p^2}{4b}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{2^{2\rho+2m+\mu+\nu-1} a^{2r} b^{\rho+m+(\mu+\nu-1)/2} \Gamma(1+\mu)\Gamma(1+\nu)}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)\, p^{2\rho+2m+\mu+\nu-1+2r}\, \Gamma\{\rho+(\mu+\nu)/2\}}$$

$$\times G_{23}^{21}\left(\frac{p^2}{4b}\middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}+m,\ \rho-\frac{1}{2}+m+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \\ \frac{2\rho+2m-1+\mu+\nu}{2}+r,\ \frac{2\rho+2m-1+\mu-\nu}{2}+r, \\ \rho-\frac{1}{2}-m+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right)$$

पुनः (14) में $a=p$ रखने पर

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} \mathcal{J}_\mu(pt^{1/2}) \mathcal{J}_\nu(pt^{1/2})\, e^{-bt/2} W_{k,m}(bt)\, dt$$

$$= \sum_{r=0}^\infty \frac{2^{2\rho} p^{-2\rho}}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)} \times G_{34}^{22}\left(\frac{p^2}{4b}\middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}-m,\ \frac{1}{2}+m,\ \rho+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \\ \frac{2\rho+\mu+\nu}{2}+r,\ \frac{2\rho+\mu-\nu}{2}+r, \\ k,\ \rho+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \end{matrix}\right) \qquad (18)$$

यदि $R(b)>0, p>0, R(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\rho\pm m)>0.$

किन्तु [3, p. 409(37)]

$$\int_0^\infty t^{\rho-1} J_\mu(pt^{1/2}) J_\nu(pt^{1/2}) e^{-bt/2} W_{k,m}(bt)\,dt$$

$$=\frac{p^{\mu+\nu} b^{-\rho-\mu/2-\nu/2} \Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}+\rho+m\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}+\rho-m\right)}{2^{\mu+\nu}\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1+\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{\mu+\nu}{2}-k+\rho\right)}$$

$$\times {}_4F_4\left(\begin{matrix}1+\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1+\mu+\nu}{2}\ \frac{1+\mu+\nu}{2}+\rho+m, \frac{1+\mu+\nu}{2}+\rho-m; \\ 1+\mu, 1+\nu, 1+\mu+\nu, \{1+(\mu+\nu)/2\}-k+\rho;\end{matrix}\ \frac{-p^2}{b}\right)$$

(19)

यदि $R(b)>0, p>0, R(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+\rho\pm m)>0.$

अतः दोनों परिणामों की तुलना करने पर

$$F_4\ \left(\begin{matrix}1+\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1+\mu+\nu}{2}, \frac{1+\mu+\nu}{2}+m+\rho, \frac{1+\mu+\nu}{2}+\rho-m \\ 1+\mu, 1+\nu, 1+\mu+\nu, \{1+(\mu+\nu)/2\}-k+\rho;\end{matrix}\ \frac{-p^2}{b}\right)$$

$$=\frac{2^{2\rho+\mu+\nu} b^{(\mu+\nu)/2+\rho} \Gamma(1+\mu)\,\Gamma)(1+\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{\mu+\nu}{2}-k+\rho\right)}{p^{2\rho+\mu+\nu}\,\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}+m+\rho\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}+\rho-m\right)}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\,\Gamma(1+\mu+r)}\times G_{34}^{22}\left(\frac{p^2}{4}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}-m, \frac{1}{2}+m, \rho+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu \\ \frac{2\rho+\mu+\nu}{2}+r, \frac{2\rho+\mu-\nu}{2}+r, k, \rho+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu\end{matrix}\right)$$

(20)

उपर्युक्त में $\mu=\nu$ रखने पर लेखक द्वारा प्राप्त एक अर्वाचीन परिणाम [5] प्राप्त होता है ।

निर्देश

1. बेली, डब्लू० एन० । **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1935, **40**, 37-48.

2. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral transforms. **भाग 1, मकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.

3. वही । Tables of Integral transforms **भाग 2, मकग्राहिल, न्यूयार्क** 1954.

4. वही । Higher Transcendental Functions. **भाग 1**, 1953.

5. मल्लू, एच० बी० । **मोनैटशेफ्टे फुर मैथेमेटिक (प्रेस में)**

6. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1959, **25**, 340-45.

7. शर्मा०, के० सी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1964, **30**, 360-66.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 37-42

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 37-42

कैम्पे द फेरीत का फलन सम्बन्धी एक समाकल

जे० पी० सिंघल

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अप्रैल 21, 1967]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में समाकल

$$\int_0^\infty t^{p-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2q}$$

$$\times F\left[\begin{array}{l|l} \lambda & \alpha_1,\ldots\alpha_\lambda \\ \mu & \beta_1,\beta'_1,\ldots\beta_\mu,\beta'_\mu \\ \nu & \sigma_1,\ldots\sigma_\nu \\ \delta & \rho_1,\rho'_1\ldots\rho_\delta,\rho'_\delta \end{array}\middle| \frac{-xt^r}{[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2s}}, \frac{-yt^r}{(t^{1/2}+1+t^{1/2})^{2s}}\right] dt$$

जहाँ r, s अनृण पूर्ण संख्यायें हैं जिससे कि $r \leqslant s$, $R_e(p) > 0$ तथा $R_e(\frac{1}{2}-p-q) > 0$ को द्विक हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूप में ज्ञात किया गया है और इसकी कई विशिष्ट दशाओं की विवेचना की गई है।

Abstract

An integral involving Kampe De Fériet's function. *By* J. P. Singhal, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In the present note the integral

$$\int_0^\infty t^{p-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2q}$$

$$\times \left[\begin{array}{l|l} \lambda & \alpha_1,\ldots\ldots\alpha_\lambda \\ \mu & \beta_1,\beta'_1,\ldots;\beta_\mu,\beta'_\mu \\ \nu & \sigma_1,\ldots\ldots;\sigma_\nu \\ \delta & \rho_1,\rho'_1;\ldots;\rho_\delta,\rho_\delta' \end{array}\middle| \frac{-xt^r}{[t^{1/2}(1+t)^{1/2}]^{2s}}, \frac{-yt^r}{[t^{1/2}+(1+t^{1/2})]^{2s}}\right] dt,$$

where r, s are non-negative integers such that $r \leqslant s$, $Re(p)>0$ and $Re\,(\frac{1}{2}-p-q)>0$, is evaluated in terms of a double hypergeometric series and its several special cases are discussed.

1. काम्पे द फेरियत फलन की सामान्य संकेत प्रणाली का व्यवहार करने पर [1, p. 150] को

$$(1.1) \qquad F\left[\begin{array}{c|l|}\lambda & \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_\lambda \\ \mu & \beta_1, \beta'_1; \ldots; \beta_\mu, \beta'_\mu \\ \nu & \sigma_1, \ldots\ldots, \sigma_\nu \\ \delta & \rho_1, \rho'_1; \ldots; \rho_\delta, \rho'_\delta\end{array}\; x, y\right]$$

$$=\sum \frac{\prod_{i=1}^{\lambda}(\alpha_i, m+n)\prod_{i=1}^{\mu}(\beta_i, m)(\beta'_i, n)\cdot x^m \cdot y^n}{(1,m)(1,n)\prod_{i=1}^{\nu}(\sigma_i, m+n)\prod_{i=1}^{\sigma}(\rho_i, m)(\rho'_i, n)},$$

रूप में लिख सकते हैं जिस द्विक में श्रेणी के अभिसारी होने के लिये $\lambda+\mu<\nu+\delta+1$ ।

माना कि r, s ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हैं कि $r \leqslant s$, तथा अब समाकल

$$(1.2) \qquad I=\int_0^\infty t^{p-1}(1+t)^{1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2q}$$

$$\times F\left[\begin{array}{c|l|}\lambda & \alpha_1, \ldots\ldots; \alpha_\lambda \\ \mu & \beta_1, \beta'_1; \ldots; \beta_\mu, \beta'_\mu \\ \nu & \sigma_1, \ldots\ldots; \sigma_\nu \\ \delta & \rho_1, \rho'_1; \ldots; \rho_\delta, \rho'_\delta\end{array}\; \frac{-xt^r}{T^s}, \frac{-yt^r}{T^s}\right] dt,$$

पर विचार करने से जहाँ $Re(p)>0, Re(\frac{1}{2}-p-q)>0$, तथा संक्षेप करने की दृष्टि से,

$$T=[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^2$$

(1.2) का मान ज्ञात करने के लिये हम हाइपरज्यामितीय फलन के घातांक श्रेणी प्रसरण को प्रतिस्थापित करेंगे तथा द्विगुण संकलन एवं समाकलन के क्रम को उलट देंगे जो पूर्वोक्त दशाओं में तर्कसम्मत है।

ज्ञात सूत्र [3, p. 311] के उपयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{p-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2q}\,dt=2^{1-p}\,B(2p, \tfrac{1}{2}-p-q)$$

जो $Re\,(p)>0$ तथा $Re\,(\frac{1}{2}-p-q)>0$, के लिए विहित है। हम देखते हैं कि जब भी (1·2) अभिसारी होता है

$$(1\cdot3)\qquad I=\frac{2^{1-2p}\,\Gamma(2p)\,\Gamma(\frac{1}{2}-p-q)}{\Gamma(\frac{1}{2}+p-q)}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\lambda+s+r\\ \mu\\ \nu+s+r\\ \delta\end{matrix}\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\lambda,\ \Delta(r,p),\ \Delta(r,p+\frac{1}{2})\ \Delta(s-r,\frac{1}{2}-p-q)\\ \beta_1,\beta'_1,\ldots\ldots;\beta_\mu,\beta'_\mu\\ \sigma_1\ \ldots\ldots,\sigma_\nu,\Delta(s+r,\frac{1}{2}+p-q)\\ \rho_1,\rho'_1;\ldots\ldots;\rho_\delta,\rho'_\delta\end{matrix}\right|-\xi x,\xi y\right],$$

जहाँ $\qquad \xi=\dfrac{r^{2r}\,(s-r)^{s-r}}{(s+r)^{s+r}},\ Re.(p)>0,\ Re.(\frac{1}{2}-p-q)>0$

तथा यथावत् $\Delta\,(r,\,p)$ r पैरामीटरों (प्राचलों) के समूह को द्योतित करता है

$$\frac{p}{r},\frac{p+1}{r},\ \ldots\ldots\ldots,\frac{p+r-1}{r}$$

2. विशिष्ट दशायें

यदि हम (1·3) में $r=1$ तथा $s=1$ रखें तो हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होगा

$$(2.1)\qquad \int_0^\infty t^{p-1}(1+t)^{-1/2}\,[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2q}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\\ \delta\end{matrix}\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_\lambda\\ \beta_1,\beta'_1;\ldots\ldots;\beta_\mu,\beta'_\mu\\ \lambda_1,\ldots\ldots,\sigma_\nu\\ \rho_1,\rho'_1;\cdots\rho_\delta,\rho'_\delta\end{matrix}\right|\frac{-xt}{T},\frac{-yt}{T}\right]dt$$

$$=\frac{2^{1-2p}\,\Gamma(2p)\,\Gamma(\frac{1}{2}-p-q)}{\Gamma(\frac{1}{2}+p-q)}\,.$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\lambda+2\\ \mu\\ \nu+2\\ \delta\end{matrix}\left|\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_\lambda,p,p+\frac{1}{2}\\ \beta_1,\beta'_1;\ldots;\beta_\mu,\beta'_\mu\\ \sigma_1,\ldots,\sigma_\nu,\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+p-q),\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+p-q)\\ \rho_1,\rho'_1;\cdots;\rho_\delta,\rho'_\delta\end{matrix}\right|-\tfrac{1}{4}x,-\tfrac{1}{4}y\right]$$

जो विहित होगा, यदि $\lambda+\mu<\nu+\delta+1$, $Re(p)>0$ तथा $Re.(\frac{1}{2}-p-q)>0$.

(2·1) की विशिष्ट दशा $\lambda=\nu,\ \alpha_i=\sigma_i\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,\lambda)$

$$(2.2)\qquad \int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}$$

$$\times {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\\ \beta_1,\ldots,\beta_q;\end{matrix} -\frac{xt}{T}\right)\cdot {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha'_1,\ldots,\alpha'_p;\\ \beta'_1,\ldots,\beta'_q;\end{matrix} -\frac{yt}{T}\right) dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\,\Gamma(2\lambda)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}\cdot F\left[\begin{matrix}2\\ p\\ 2\\ q\end{matrix}\left|\begin{matrix}\lambda,\ \lambda+\frac{1}{2}\\ \alpha_1,\alpha'_1;\ldots;\alpha_p,\alpha'_p\\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\lambda-\mu),\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\lambda-\mu)\\ \beta_1,\beta'_1;\ldots;\beta_q,\beta'_q\end{matrix}\right| -\tfrac{1}{4}x,-\tfrac{1}{4}y\right],$$

के संगत है जहाँ $p\leqslant q$, $Re.(\lambda)>0$, $Re.(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0$; तथा $Re(x)+Re(y)>0$ यदि $p=q$, जहाँ यह कल्पित है कि अंश के कोई भी प्राचल ऋण-संख्या नहीं हैं।

(2·2) में प्राचलों को विभिन्न मान प्रदान करने पर हमें ऐसे समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें दो जैकोबी बहुपदों या दो लागेर बहुपदों के गुणनफल निहित रहते हैं। उदाहरणार्थ, यदि हम निर्दिष्ट करें कि

$$p=2,\ q=1,\quad \alpha_1=-n,\ \alpha_2=1+\alpha+\beta+n,\ \beta_1=1+\alpha$$

$$\alpha'_1=-m,\ \alpha'_2=1+\alpha'+\beta'+m,\ \beta'_1=1+\alpha'$$

तथा दोनों पक्षों को $\dfrac{(1+\alpha,n)(1+\alpha',m)}{(1,n)(1+m)}$ द्वारा गुणा करें तो

$$(2\cdot3)\qquad \int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}\cdot P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2xt}{T}\right)$$

$$\times\cdot P_m^{(\alpha',\beta')}\left(1-\frac{2yt}{T}\right) dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\,\Gamma(2\lambda)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)(1+\alpha,n)(1+\alpha',m)}{(1,n)(1,m)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}2\\ 2\\ 2\\ 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\\ -n,-m;\ 1+\alpha+\beta+n,\ 1+\alpha'+\beta'+m\\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\lambda-\mu),\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\lambda-\mu)\\ 1+\alpha,\ 1+\alpha'\end{matrix}\right| \tfrac{1}{4}x,\ \tfrac{1}{4}y\right]$$

प्राप्त होगा जिसमें λ तथा μ उपर्युक्त प्रकार सीमित हैं।

हम यह कह सकते हैं कि वे समाकल जिसमें दो गेगनबार या दो लेगंड्र बहुपदों के गुणनफल निहित हों वे सूत्र (2·3) के विशिष्ट दशाओं के रूप में होंगे क्योंकि

$$C_n^{\nu+1/2}(x)=\frac{(1+2\nu,n)}{(1+\nu,n)}\cdot P_n^{\nu,\nu}(x)\,;\;C_n^{1/2}(x)=P_n(x)$$

आगे (2·2) से प्राचलों को उपर्युक्त मान प्रदान करने पर हमें

$$(2\cdot4)\qquad \int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}\,,L_n^{(\alpha)}\left(\frac{xt}{T}\right)L'_m\left(\frac{yt}{T}\right)dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)(1+\alpha,n)(1+\alpha',m)}{(1,n)(1,m)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}2\\1\\2\\1\end{matrix}\left|\begin{matrix}\lambda,\,\lambda+\frac{1}{2}\\ -n,\,-m\\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\lambda-\mu),\,\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\lambda-\mu)\\ 1+\alpha,\,1+\alpha'\end{matrix}\right|-\tfrac{1}{4}x,\,\tfrac{1}{4}y\right].$$

प्राप्त होगा। दूसरी ओर यदि हम परिवर्त [3, p. 105]

$${}_0F_1\left(\begin{matrix}-;\\a;\end{matrix}\,x\right)\,{}_0F_1\left(\begin{matrix}-;\\b;\end{matrix}\,x\right)={}_1F_3\left(\begin{matrix}\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\,\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{1}{2};\\a,\;b,\;a+b-1;\end{matrix}\,4x\right)$$

का व्यवहार करें तो समाकल (2·2) निम्नांकित विस्तृत सूत्र में परिणत हो जाता है

$$(2.5)\qquad \int_0^\infty t^{P-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2Q}$$

$$\times\mathcal{J}_\lambda\left(\sqrt{\frac{xt}{T}}\right)\cdot\mathcal{J}_\mu\left(\sqrt{\frac{xt}{T}}\right)\cdot\mathcal{J}_\nu\left(\sqrt{\frac{yt}{T}}\right)\cdot\mathcal{J}_\sigma\left(\sqrt{\frac{yt}{T}}\right)dt$$

$$=\frac{2^{2p}\Gamma(2p)\,\Gamma(\frac{1}{2}-p-q)\,.\,x^{1/2(\lambda+\mu)}\,.\,y^{(\nu+\sigma)/2}}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1+\mu)\,\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\sigma)\,\Gamma(\frac{1}{2}+p-q)}\,.$$

$$\times F\left[\begin{matrix}2\\2\\2\\3\end{matrix}\left|\begin{matrix}p,\,p+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(2+\lambda+\mu),\,\frac{1}{2}(2+\nu+\sigma)\,;\,\frac{1}{2}(3+\lambda+\mu),\,\frac{1}{2}(3+\nu+\sigma)\\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+p-q),\,\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+p-q)\\ 1+\lambda,\,1+\nu;\,1+\mu,\,1+\sigma;\,\lambda+\mu+1,\,\nu+\sigma+1\end{matrix}\right|-\tfrac{1}{4}x,\,-\tfrac{1}{4}y\right]$$

जहाँ $P=p^{-1/2}(\lambda+\mu+\nu+\sigma)$, $Q=q+\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+\sigma)$,

$Re.(p)>0$ तथा $Re.(\frac{1}{2}-p-q)>0$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा॰ एच॰ एम॰ श्रीवास्तव का आभारी है जिन्होंने इस शोध निबन्ध की तैयारी में सहायता की है।

निर्देश

1. एपेल, पी॰ तथा कैम्पे, जे॰। Functions hypergéométriques at hypersphériques, **पेरिस,** 1926.

2. एर्डेल्यी, ए॰। Tables of Integral transforms, **भाग 1, मैकग्राहिल,** 1954.

3. रेनबिले, ई॰ डी॰। Special functions, **मैकमिलन,** 1961.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 43-50

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 43-50

चिर सम्मत बहुपदियों के क्रियात्मक सूत्र

बी० एम० अग्रवाल

गवर्नमेंट साइंस कालेज, ग्वालियर, म० प्र०

[प्राप्त—जनवरी, 24, 1966]

सारांश

एक पिछले शोध निबन्ध (1) में लेखक ने D आपरेटर का व्यवहार करते हुये जैकोबी बहुपद के लिये क्रियात्मक सूत्र प्रस्तुत किये थे। इस टिप्पणी में एक अन्य प्रकार का क्रियात्मक सूत्र निकाला गया है। उसी विधि से लागेर तथा चार्लीर बहुपदियों के परिणाम प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Operational formulae for classical polynomials. *By* B. M. Agrawal, Government Science College, Gwalior, M. P.

In a previous paper [1], the author has given the operational formulae for the Jacobi polynomial, using the operator D. In this note another type of operational formulae using the operator D have been deduced. The same method is also applied to determine similar results for the Laguerre and Charlier's polynomials.

1. हम निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करेंगे :

$$\Delta_\alpha f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha) \tag{1}$$

जिससे कि

$$E_\alpha f(\alpha)=f(\alpha+1) \tag{2}$$

$$E\equiv 1+\alpha \tag{3}$$

सुप्रसिद्ध परिणाम [5, p. 35-36] हैं

$$\overset{n}{\Delta}_x[u_x\, v_x]=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\Delta^{n-r}u_{x+r}\,\Delta^r v_x \tag{4}$$

$$\overset{n}{\triangle}_{\alpha}[x^{\alpha}u_{\alpha}]=x^{\alpha}[xE-1]^{n}u_{\alpha} \tag{5}$$

[2, p. 173]

जैकोबी बहुपद के सूत्र होंगे:

$$\overset{r}{\triangle}_{\alpha} P_{n}^{\alpha,\beta}(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^{r} P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x) \tag{6}$$

[4, p. 374]

$$n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)P_{n}^{\alpha,\beta}(x)=(-)^{n}\Gamma(\alpha+n+1)\Big/\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\alpha+1}$$

$$\overset{n}{\triangle}_{\alpha}\left[\Gamma(\alpha+\beta+n+1)/\Gamma(\alpha+1).\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\alpha+1}\right] \tag{7}$$

लागेर तथा चार्लीर बहुपदियों के सूत्र हैं:—

$$L_{n}^{\alpha}(x)=(-)^{n}\Gamma(\alpha+n+1)/n!\,x^{\alpha}.\overset{n}{\triangle}_{\alpha}[x^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)] \tag{8}$$

[2, p. 191]

$$\triangle^{r}L_{n}^{\alpha}(x)=L_{n-r}^{\alpha+r}(x) \tag{9}$$

[2, p. 190]

$$C_{n}(x,\,a)=x!/a^{x}\,\triangle^{n}[a^{x-n}/(x-n)!] \tag{10}$$

[2, p. 226].

अब हम निम्न सूत्र को सिद्ध करेंगे

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}(-)^{r}(\alpha+\beta+n+1)_{r}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{r}P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x)\overset{r}{\triangle}_{\alpha}.$$

$$=\frac{(-)^{n}\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)E-1\right]^{n}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$=(-)^n \prod_{j=1}^{n} \left[(\beta-\alpha)\left(\frac{1-x}{2}\right)E+(\alpha+j)(\Delta-Ex)\right] \quad (11)$$

उपपत्ति :

माना कि

$$\frown_n\phi(\alpha)=\frac{(-)^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-(\alpha+1)}$$

$$\Delta_\alpha^n\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\alpha+1}\phi(\alpha)\right] \quad (12)$$

(4) का प्रयोग करने पर

$$=\frac{(-)^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left(1-x/2\right)^{-(\alpha+1)}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\Delta_\alpha^{n-r}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+r+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\alpha+r+1}\right]\Delta^r\phi(\alpha).$$

(7) की सहायता से हमें

$$\frown_n\phi(\alpha)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}(-)^{r(\alpha+\beta+n+1)_r}\left(\frac{1-x}{2}\right)^r P_{n-r}^{\alpha+r,\,\beta+r}(x)\,\Delta_\alpha^r\,\phi(\alpha) \quad (A)$$

प्राप्त होगा। अब (12) में (5) का प्रयोग करने से

$$\frown_n\phi(\alpha)=\frac{(-)^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-(\alpha+1)}$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^{\alpha+1}\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)E-1\right]^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\phi(\alpha)$$

$$=\frac{(-)^n\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)E-1\right]^n$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\phi(\alpha) \quad (B)$$

निम्नांकित के सम्बन्ध में विचार करने पर

$$\frown_{n+1}\phi(a)=\frac{(-)^{n+1}\Gamma(a+n+2)}{\Gamma(a+\beta+n+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-(a+1}$$

$$\triangle_{a}^{n+1}\left[\frac{\Gamma(a+\beta+n+2)}{\Gamma(a+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1}\phi(a)\right]$$

$$=\frac{(-)^{n+1}\Gamma(a+n+2)}{\Gamma(a+\beta+n+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-(a+1)}\Big[(a+\beta+n+1)$$

$$\triangle^{n+1}\left(\frac{\Gamma(a+\beta+n+1)}{\Gamma(a+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+1}\phi(a)\right)+(n+1)$$

$$\triangle^{n}\left(\frac{\Gamma(a+\beta+n+2)}{\Gamma(a+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{a+2}\phi(a+1)\ \right)\Big]$$

$$=(-)\left[(\beta+a)\left(\frac{1-x}{2}\right)E+(a+n+1)(\triangle-Ex)\right]\frown_{n}\phi(a$$

अतः

$$\frown_{n}\phi(a)=(-)^{n}\prod_{j=1}^{n}\left[(\beta-a)\left(\frac{1-x}{2}\right)E+(a+j)(\triangle-Ex)\right]\phi(a) \qquad (C)$$

A, B, C को समीकृत करने पर हमें (11) प्राप्त होगा। यही सिद्ध करना था।

विशिष्ट दशायें

माना कि $\phi(a)=1$, तो

$$n!P_{n}^{\alpha,\beta}(x)=(-)^{n}\prod_{j=1}^{n}\left[(\beta-a)\left(\frac{1-x}{2}\right)E+(a+j)(\triangle-Ex)\right]1$$

अतः

$$\frac{(m+n)!}{n!}P_{m+n}^{\alpha,\beta}(x)=(-)^{m}\prod_{j=1}^{m}\ \left[(\beta-a)\left(\frac{1-x}{2}\right)E\right.$$

$$+(\alpha+j+n)(\triangle-Ex)\Big]\,P_n^{\alpha,\beta}(x)$$

$$=\sum_{r=0}^{m}\frac{m!}{r!}(\alpha+\beta+m+2n)_r(-)^r\left(\frac{1-x}{2}\right)^r P_{m-r}^{\alpha+n+r,\beta+n+r}(x)\triangle^r P_n^{\alpha,\beta}(x)$$

(6) का प्रयोग करने पर

$$\binom{m+n}{m}P_{m+n}^{\alpha,\beta}(x)=\sum_{r=0}^{\min(m,n)}(-)^r\frac{(\alpha+\beta+n+1)_r}{r!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^r\left(\frac{1+x}{2}\right)^r$$

$$P_{m-r}^{\alpha+n+r,\beta+n+r}(x)\,P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x) \qquad (13)$$

(13) से हम

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{m}P_{m+n}^{\alpha-n,\beta-n}(x)\,t^n=\sum_{r=0}^{m}\frac{(1-x)^r t^r(-)^r(1+\alpha+\beta+m)_r}{r!\,2^{2r}}$$

$$P_{m-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\alpha-n,\beta-n}(x)\,t^n$$

$$=2^{-(\alpha+\beta)}(2+t^{(1+x)})^{\alpha}(2+t^{(x-1)})^{\beta}$$

$$P_m^{\alpha,\beta}\left(x+\frac{x^2-1}{2}\,t\right) \qquad (14)$$

व्युत्पन्न कर सकते हैं। इसी प्रकार हम

$$\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{m}\frac{(\alpha+\beta+2n+1)_m}{(1+\beta+n)_n}P_{m+n}^{\alpha,\beta}(x)\,t^m$$

$$=\frac{(1+t)^{-\alpha-\beta-2n-1}(-)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{n!\,2^n}$$

$$D^n\Big[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\Big]$$

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\dfrac{1+\alpha+\beta+2n}{2}, \dfrac{\alpha+\beta+2+2n}{2}; \dfrac{2t(1+x)}{(1+t)^2}\\ 1+\beta+n\end{matrix}\right] \tag{15} $$

भी व्युत्पन्न कर सकते हैं।

यदि हम $\phi(a)=\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\beta+n+1)}$ मानें जिससे कि

$$ \triangle^r\phi(a)=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\beta+n+1+r)}(-)^r(\beta+n)_r $$

तो हमें

$$ \sum_{r=0}^{n}\frac{(-)^r n!}{r!}(\alpha+\beta+n+1)_r\left(\frac{1-x}{2}\right)^r\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\beta+n+1+r)} $$

$$ (-)^r(\beta+n)_r\, P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x) $$

$$ =(-)^n\Gamma(a+n+1)/\Gamma(a+\beta+n+1)\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)E-1\right]^n 1 $$

प्राप्त होगा जो

$$ \left(\frac{1+x}{2}\right)^n=\frac{n!}{(1+\alpha)_n}\sum_{r=0}^{n}\frac{(\beta+n)_r\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^r}{r!}P_{n-r}^{\alpha+r,\beta+r}(x) \tag{16} $$

में परिणत हो जाता है। (12A) से विशुद्ध ज्ञात आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त किया जा सकता है [2, p. 173]

$$ (n+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+1)(1-x)P_n^{\alpha+1,\beta}(x)=(n+\alpha+1)P_n^{\alpha,\beta}(x) $$

$$ -(n+1)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) \tag{17} $$

4. इसी प्रकार लागेर तथा चार्लीर के बहुपदियों के निम्नांकित सूत्र भी ज्ञात किये जा सकते हैं:

$$ n!\sum_{r=0}^{m}\frac{(-)^r x^r}{r!}L_{n-r}^{\alpha+r}(x)\triangle^r $$

$$=\prod_{j=1}^{n}[-xE+\alpha+j] \tag{18}$$

$$=(-)^n\Gamma(\alpha+n+1)[xE-1]^n\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

तथा
$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}C_{n-r}(x,\alpha)\Delta^r=\alpha^{-n}\prod_{j=1}^{n}[\alpha E-x-1+j] \tag{19}$$

(18) से [3 p. 221]

$$\binom{m+n}{m}L_{m+n}^{\alpha}(x)=\sum_{r=0}^{min(m,n)}\frac{(-)^r}{r!}x^rL_{m-n}^{\alpha+n+r}(x)\ L_{n-r}^{\alpha+r}\ x) \tag{20}$$

तथा [2, p. 190],

$$x\ L_n^{\alpha+1}(x)=(n+\alpha+1)\ L_n^{\alpha}(x)-(n+1)\ L_{n+1}^{\alpha}(x) \tag{21}$$

प्राप्त हो सकते हैं।

(19) से हम

$$C_{m+n}(x,\alpha)=\sum_{r=0}^{min(m,n)}\binom{n}{r}\binom{m}{r}\frac{r!}{(-\alpha)^r}C_{m-r}(x-n,\alpha)\ C_{n-r}(x,\alpha) \tag{22}$$

तथा

$$\alpha[C_{n+1}(x,\alpha)-C_n(x,\alpha+1)]=(n-x)\ C_n(x,\alpha) \tag{23}$$

प्राप्त कर सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध निबन्ध की तैयारी में डा० बी० आर० भोंसले ने जो सहायता पहुँचाई है उसके लिये लेखक आभारी है।

निर्देश

1. अग्रवाल, बी० एम० । **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1964, **7** , 89-92.
2. बेटमैन प्रोजेक्ट । Higher transcendental Functions, 1953, न्यूयार्क
3. कार्लिट्ज, एल० । **मिच० मैथ जर्न०,** 1960, **7,** 219-223.
4. वही । **बाल० यूनि० मैथ०, इटैलियाना,** 1956, **11,** 371-81.
5. मिल्ने थामसन, एल० एम० । The Calculus of Finite Differences. लन्दन, 1933.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 51-61

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 51-61

सौर विकिरण एवं जीवन की उत्पत्ति

कृष्ण बहादुर, एस० रंगनायकी तथा प्रतिभा श्रीवास्तव

रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 8, 1967]

सारांश

जैसा कि हमारे ऋषियों का विश्वास था, सूर्य पृथ्वी का जीवनदाता है। सृष्टि के प्रारम्भ में पृथ्वी पर कार्बनिक पदार्थों तथा अकार्बनिक उत्प्रेरकों से युक्त समुद्रों पर सूर्य के विकिरणों के प्रभाव से ऐमीनो अम्ल, पेप्टाइड, तथा जैविक कोटि के गुणों से युक्त सूक्ष्म कोशीय 'जीवाणुओं' का निर्माण हुआ। इन जीवाणुओं कै भीतर जीव विज्ञान सम्बन्धी कार्बनिक पदार्थ बने, और धीरे धीरे विकास के साथ साथ जीवाणु अपनी आन्तरिक संरचना में अधिक जटिल होते गये, और इस प्रकार अंत में वर्तमान युग के कोशों की उत्पत्ति हुई।

Abstract

Solar radiations and origin of life. *By* Krishna Bahadur, S. Ranganayaki and Pratibha Srivastava, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Thus as the sages believed, Sun is the life giver of our earth, and amino acids, peptides, and Jeewanu, the protocells, showing the properties of biological order were formed when the oceans of the primitive earth containing organic substances and inorganic catalysts were exposed to the solar radiations. Inside these Jeewanu, organic substances of biological interest were formed and in due course of evolution, Jeewanu became more and more complicated in internal structures, finally resulting in the cell of the present age.

पृथ्वी पर जीवन की उत्पत्ति के क्षेत्र में कार्य करने वाले सभी वैज्ञानिक इस बात से सहमत हैं कि पूर्वतम कोशों के निर्माण के पूर्व उन कार्बनिक यौगिकों का संश्लेषण हुआ, जिनसे फिर बाद में इन कोशो का निर्माण हुआ। उन दशाओं पर विचार करते हुए, जिनमें कि इन पदार्थों का संश्लेषण प्राकृतिक वातावरण में हो सकता है, हमें पहले उन दशाओं पर विचार करना चाहिए, जो पृथ्वी पर इस समय भी उपस्थित हैं केवल उन अन्तरों को छोड़कर जो कि पृथ्वी और उसके वातावरण से जीवित पदार्थों की अन्तःक्रिया के कारण जैविक कोटि के गुणों तथा भौतिक-रासायनिक दशाओं में हुई हैं। यह बहुत आवश्यक है क्योंकि प्राप्त प्रमाणों के

आधार पर जीवन का उत्पत्ति काल आज से लगभग 2-2·5 बिलियन वर्ष पूर्व प्रतीत होता है, और उस काल में उपस्थित दशाओं के सम्बन्ध में केवल अप्रत्यक्ष प्रमाण प्राप्त होता है, और बहुधा वे विभिन्न वैज्ञानिकों की कल्पना की उपज मात्र हैं। इसके अतिरिक्त अभी तक इस दिशा में खोज पूर्ण नहीं हुई है, जिनसे कि पृथ्वी की भौतिक-रासायनिक दशाओं का एक असंदिग्ध चित्र प्राप्त किया जा सके।

हाल में ऊर्जा के ऐसे स्रोतों की सहायता से जो कि सम्भवतः आकस्मिक थीं, और सामान्य नहीं हैं, जीवविज्ञान सम्बन्धी पदार्थों के संश्लेषण करने की एक विशेष प्रकृति रही है। इस प्रकार के संश्लेषण तभी संभव हुये होंगे, जबकि एकाएक कोई विशेष घटना हुई हो। अतः इस प्रकार के संश्लेषण का तभी महत्त्व हो सकता है जबकि यह निश्चित हो जाये कि ऐसे पदार्थों का निर्माण प्रकृति की सामान्य दशाओं में नहीं हो सकता।

यह निश्चित है कि पृथ्वी के अस्तित्व के प्रारम्भ से ही सौर ऊर्जा प्राप्य रही है और इस प्रकार की ऊर्जा के उपयोग की सम्पन्न अभिक्रियाओं का पृथ्वी पर जीवन की उत्पत्ति सम्बन्धी खोजों में विशेष महत्त्व है।

जीवन की उत्पत्ति के पूर्व अजैवी पद्धति द्वारा जैविक कोटि के निर्मित महत्त्वपूर्ण यौगिकों में ऐमीनो अम्लों का सर्वाधिक महत्त्व है, क्योंकि पृथ्वी पर ज्ञात जीवित पदार्थों का निर्माण मुख्यतः प्रोटीन से ही हुआ है।

सर्वप्रथम 1913 में लोएब[1] ने फार्मेल्डीहाइड, अमोनिया तथा जल के मिश्रण में निःशब्द विद्युत विसर्ग प्रवाहित करके ऐमीनो अम्ल का संश्लेषण किया। विद्युतीय विधि का प्रयोग करते हुये 1953 में मिलर ने उन गैसों में, जो सम्भवतः पृथ्वी के वातावरण में प्रारम्भिक दशा में उपस्थित थीं, विद्युत विसर्ग प्रवाहित करके ऐमीनो अम्लों का संश्लेषण किया। 1954 में बहादुर ने[2,3] प्रदर्शित किया कि एमीनो अम्लों का संश्लेषण प्रकाश-रासायनिक विधि के द्वारा, कार्बनिक कार्बन के स्रोत, तथा मिट्टी में सामान्यतः प्राप्त कार्बनिक उत्प्रेरकों से युक्त निर्बीजित जलीय मिश्रणों में किया जा सकता है। इस विषय पर अनेक वैज्ञानिकों ने अनेक शोध पत्र प्रकाशित किये हैं।[3-16] 1958 में सेंट मेरी औषधालय लंदन के प्रो० ए० न्यूबर्गर, एफ० आर० एस०, ने ऐमीनो अम्लो के संश्लेषण की इस सरल विधि की खोज के लिये बहादुर की सराहना की है।

पूर्वजैविक युग में ऐमीनो अम्लों के निर्माण की इस सरल विधि के द्वारा, जो कि सम्भवतः पुरातन पृथ्वी के तालाबों एवं समुद्रों में हुई होगी, पर्याप्त मात्रा में ऐमीनों अम्लों का निर्माण हुआ होगा। अभी हाल में कुछ लेखकों ने ऐमीनो अम्लों के निर्माण के हेतु विद्युत विसर्ग तथा अन्य तीव्र विकिरणों को सहायक मानने पर विशेष बल दिया है, यहाँ तक कि उन्होंने इन तीव्र विकिरणों के प्रभाव में उत्पन्न उत्पादों के स्थायित्व के सम्बन्ध में हल[17] के ऊष्मागतिकीय विचारों की भी पूर्णतः उपेक्षा कर दी है। यह सर्वविदित है कि पृथ्वी पर जल के आविर्भाव के साथ ही तीव्र पराबैंगनी विकिरणों का आना रुक गया और पृथ्वी पर उसकी उत्पत्ति के बाद शीघ्र ही जल उत्पन्न हो गया।

जैविक कोटि के यौगिकों में पेप्टाइड का निर्माण एक दूसरा महत्त्वपूर्ण चरण है। निर्बीजित जलीय मिश्रणों में प्रकाश-रासायनिक विधि द्वारा पेप्टाइड के निर्माण की सूचना सर्वप्रथम 1958 में[18,19]

प्रकाशित हुई। तब से भारत एवं विदेशों की अनेक प्रयोगशालाओं में इस दिशा में निरन्तर कार्य हो रहा है और इस विषय पर अनेक शोधपत्र प्रकाशित हुये हैं, जिनका संक्षेपन भी हो चुका है[20,21,22,23,24,25,26]। ऐसा देखा गया है कि यदि ऐमीनों अम्लों तथा अकार्बनिक उत्प्रेरकों के निर्बीजित जलीय विलयन को प्रकाश में रखा जाये, तो मिश्रण में अनेक पेप्टाइड बन जाते हैं। पूर्वजैविक युग में पेप्टाइड का निर्माण सरल था, इस प्रक्रम के लिये और सौर विकिरणों से आवश्यक ऊर्जा प्राप्त हुई।

26 से 28 फरवरी 1963, तक जेट प्रोपल्सन प्रयोगशाला, पैसाडेन में इंग्लैंड के डा० एम० एच० ब्रिग्स के तत्वधान में बहि:जीवविज्ञान के आधुनिक अनुसंधान कार्य पर एक गोष्ठी आयोजित हुई। उसमें प्रोफेसर जे० ओरो के शोधपत्र "The experimental investigation of chemical evolution" की विवेचना के समय, जिसमें ई० ऐन्डरस, जी० क्लास, एफ० फिच, एन० होरोविट्ज, एल० जाफे, बी० मैसन, बी० नैगी, जे० ओरो०, एफ० क्विम्बी, ओ० रेनोल्डस, सी० सागन, के० बहादुर, तथा बहि:जीवविज्ञान में महत्त्वपूर्ण कार्य करते हुये अन्य वैज्ञानिक उपस्थित थे, नोबल पुरस्कार विजेता प्रो० यूरे ने अपना मत प्रगट किया कि ज्वालामुखियों के निकट पेप्टाइड के निर्माण की खोज करने का प्रयत्न नितान्त हास्यापद है, तथा पेप्टाइड के निर्माण की खोज जलीय मिश्रणों में कीलेट बनाने वाले धात्विक आयनों की उपस्थिति में प्रकाश की सहायता के द्वारा किया जाना चाहिये। डा० एम० एच० ब्रिग्स प्रकाश-रासायनिक विधि द्वारा पेप्टाइड के निर्माण में उत्सुक हो गये तथा 17 मार्च, 1963 को उन्होंने जेट प्रोपल्सन प्रयोगशाला, कैलीफोर्निया इन्स्टीट्यूट आव टेक्नालाजी, पैसाडेना से बहादुर को एक पत्र में लिखा :—

"प्रकाश द्वारा पेप्टाइड के संश्लेषण की आप की विधि मुझे इस क्षेत्र में बहुत वर्षों के लिये सबसे महत्त्वपूर्ण प्रगति प्रतीत होती है, और मैं बड़ा कृतज्ञ हूँगा, यदि आप अपनी प्रयोगात्मक विधि के पूर्ण विवरण भेज दें, जिससे कि मैं भी इस कार्य को दुहरा सकूँ।"

ये पूरे विवरण डा० एम० एच० ब्रिग्स को भेजे गये, और 8 मई, 1963 को एक पत्र में उन्होंने लिखा :—

"हम लोगों ने सभी विलयनों को कृत्रिम प्रकाश में लगभग तीन सौ घंटों तक रखा, और सभी ने पेप्टाइड का निर्माण प्रदर्शित किया।"

पेप्टाइड निर्माण के इस कार्य की पुष्टि अनेक प्रयोगशालाओं में हो चुकी है, और इस विषय पर अनेक शोधपत्र प्रकाशित हो चुके हैं। इन शोध पत्रों में से अधिकांश का निर्देश बहि:जीवविज्ञान की विषयावली में हो चुका है जिसका संकलन, डा० एम० एच० ब्रिग्स के प्रधान सम्पादकत्व में जे० पी० एल० पैसाडेना के बहि:जीव विज्ञान विभाग ने एन० ए० एस० ए० के अन्तर्गत किया है।

वर्तमान काल में जैविक कोटि के गुणों से युक्त आणविक समूहों के निर्माण की समस्या प्रमुख है। इस क्षेत्र में 1963 में उद्घोषित जीवाणु का कार्य प्रकाशित हो चुका है[27,28,29,30,31,32,33,34], और डा० एम० एच० ब्रिग्स ने[35,36] अपनी प्रयोगशाला में स्वतन्त्र रूप से इसकी दो बार पुष्टि भी की है। अन्तरिक्ष विज्ञान में प्रकाशित अपने शोध-पत्र "Experiments on origin of cells"[35] में डा० ब्रिग्स लिखते हैं :—

'अनेक लेखकों ने (ओपेरिन का रिव्यू देखिये[37]) सरल अकार्बनिक तथा कार्बनिक मिश्रणों की अन्तःक्रिया से कोशों की रचना को द्विगुणित करने के प्रयोग किये हैं। इसमें कोई सन्देह नहीं कि इन कार्यकर्ताओं द्वारा प्राप्त उत्पाद रचना में जीवित कोशों के समरूप हैं, परन्तु उनमें यही समानता है, अन्यथा वे रासायनिक संगठन में भिन्न हैं, चयोपचय प्रक्रियता की दृष्टि से अक्रिय हैं, न वृद्धि करते हैं, और न प्रजनन ही करते हैं। इसके अतिरिक्त ये कृत्रिम कोश ऐसे पदार्थों से तथा ऐसी दशाओं में बनाये गये हैं जो कि संभवतः पृथ्वी पर उसकी आरम्भिक अवस्था में उपस्थित न थे। इन उत्पादों में से केवल फाक्स[38] की रचनाएँ रोचक हैं, जिन्होंने यह प्रदर्शित किया है कि ऊष्मीय विधि द्वारा संश्लेषित प्रोटीनगुणी पदार्थ जल में माइक्रोस्फियर उत्पन्न करते हैं।'

'अभी हाल में बहादुर[27] तथा पर्ती[31] ने सिट्रिक अम्ल तथा मालिब्डनम या आयरन के कोलाइडी लवणों से युक्त निर्बीजित विलयन पर सूर्य के प्रकाश अथवा पराबैंगनी लैम्प के प्रकाश के प्रभाव से कोशों के समान सूक्ष्म रचनाओं के एक श्रेणी (जिसका नामकरण उन्होंने एक संस्कृत शब्द "जीवाणु" जिसका अर्थ "जीवन के कण" है, किया है) का वर्णन किया है। **इस शोधपत्र का उद्देश्य इस कार्य की पुष्टि तथा विस्तार की सूचना देना है।'**

इन आणविक समूहों के रासायनिक संगठन का वर्णन करते हुए डा० ब्रिग्स[36] लिखते हैं:

'पुरातन जलमण्डल का छद्मरूप प्राप्त करने के लिये पहले एक किलोग्राम संपीडित यीस्ट को 500° सेन्टीग्रेड पर 12 घंटे तक गरम करके राख में परिणत किया गया। इस राख की कार्बनिक पदार्थों, तथा कोशीय अवशेषों के लिये परीक्षा की गई, तो उसमें ये नहीं पाये गये। फिर इस राख को तीन बार आसवित किये एक लीटर जल में विलयित किया गया।'

विभिन्न प्रकार के कार्बनिक मिश्रणों, यथा फार्मेल्डीहाइड+अमोनियम नाइट्रेट, ऐसेटएल्डीहाइड+अमोनियम नाइट्रेट, पैरा फार्मएल्डीहाइड + अमोनियम फास्फेट, टाइरोसीन अकेले, सिट्रिक अम्ल+अमोनियम फास्फेट, तथा केवल कैसीन-हाइड्रोलिसेट की परीक्षा की गई। कुछ प्रयोगों में अकार्बनिक निलम्ब (फेरिक आक्साइड विलय, मालिब्डिक आक्साइड विलय, एलूमिना) मिलाकर उनके प्रभावों का भी अध्ययन किया गया।

विलयनों को क्वार्ट्ज के फ्लास्कों में लिया गया, और उन्हें सील करके आटोक्लेव में निर्बीजित किया गया। प्रत्येक प्रयोग में प्रत्येक प्रकार के विलयन के लिये चार-चार फ्लास्क लगाये गये। प्रत्येक विलयन के दो फ्लास्कों को तुरन्त मोटे काले कपड़े से ढक दिया गया, और अन्धेरे में एक बन्द दराज में रख दिया गया, और अन्य दो फ्लास्कों को 500 वाट के एक बल्ब के प्रकाश में चार से छः मास तक रखा गया। इसी प्रकार के दूसरे प्रयोगों में फ्लास्कों को, 300 मिली माइक्रान से कम वाली विकिरणों को हटाने वाले फिल्टर से युक्त एक उच्च दाब के पारद पराबैंगनी लैम्प के प्रकाश से अनुप्रभावित किया गया। फ्लास्कों को खोल कर उनके द्रव्यों की परीक्षा फौरन माइक्रोस्कोप से की गई। प्रत्येक फ्लास्क के द्रव्यों के इन्जेक्शन सूक्ष्मजीवाणुओं की निर्बीजित माध्यमों की श्रेणी तथा ऐगर के ढेरों में लगाये गये। इन्हें फिर सीलबन्द करके 37° सें० पर इन्क्यूबेटर में दो सप्ताह तक रखा गया। किसी भी माध्यम अथवा ऐगर पुंजों में सूक्ष्मजीवाणुओं की कोई वृद्धि नहीं दिखाई पड़ी, जिससे प्रगट हुआ कि फ्लास्क इन सूक्ष्म जीवाणुओं से मुक्त थे।

अंधेरे में रखे गये फ्लास्कों की माइस्क्रोस्पीय परीक्षा से उनमें कोई सूक्ष्म-रचनायें नहीं पाई गईं, परन्तु प्रकाश से अनुप्रभावित सभी फ्लास्कों में 0·5 माइक्रान से 15 माइक्रान तक की आकार वाली अनेक गोलाकार सूक्ष्म रचनायें दिखाई पड़ीं। इन रचनाओं में से अधिकांश एकाकी थीं, परन्तु कुछ में कलियाँ फूट रही थीं, और कुछ 3 से 15 तक के समूहों में उपस्थित थीं। सभी फ्लास्कों में, विभिन्न मात्राओं में, समान रचनायें दिखाई दीं।

प्रकाश से अनुप्रभावित विलयनों के बड़े नमूनों को फिर 5000 चक्र प्रति मिनट की गति से 30 मिनट तक अपकेन्द्रित किया गया, जिससे कि वे एक अवक्षेप तथा स्वच्छ विलयन में पृथक हो गये।

ऊपरी स्वच्छ विलयन, तथा घुले हुय अवक्षेपों के नमूनों में उच्च वोल्ट पर पत्रीय वैद्युत अपोहन (paper-electrophoresis) द्वारा ऐमीनो अम्लों का विश्लेषण किया गया। अंधेरे में रखे गये विलयनों की भी उसी प्रकार परीक्षा की गई। अंधकार में रखे किसी भी विलयन में (जिनमें प्रयोग के आरम्भ में एमीनो अम्ल नहीं मिलाये गये थे) कोई भी ऐमीनो अम्ल नहीं मिला। परन्तु प्रकाश से अनुप्रभावित सभी फ्लास्कों में, जिनमें प्रयोग के प्रारम्भ में एल्डीहाइड तथा अमोनियम लवण लिये गये थे, अब मुक्त ऐमीनो अम्ल उपस्थित थे, ग्लाइसीन, ग्लूटैमेट, एस्पर्टेट, तथा एलानीन सभी में पाये गये। लिये हुय एल्डीहाइडों की लगभग 0·1% मात्रा 4 मास के अनुप्रभावन के पश्चात् मुक्त एमीनो अम्लों के रूप में उपस्थित थी।

सभी फ्लास्कों के अवक्षेपों की परीक्षा से उन्हीं चार मुक्त एमीनो अम्लों की उपस्थिति का भान हुआ। अवक्षेपों से पत्र पर कई पेप्टाइड के धब्बे भी दिखाई पड़े, जो ब्रोमोफीनाल ब्लू से रंग देते थे। $5N$ हाइड्रो-क्लोरिक अम्ल के द्वारा अवक्षेपों के जलअपघटन से अनेक ऐमीनो अम्ल मुक्त हुये, जिनकी पहचान वैद्युत अपोहन आरेख पत्र पर की गई। विभिन्न विलायकों में *Rf* मानों से निम्न ऐमीनो अम्लों की पहचान की गई :—

ग्लाइसीन, एलानीन, ग्लूटैमेट, ऐस्पर्टेट, हिस्टीडीन, लाइसीन, आर्जीनीन, सेरीन, थ्रियोनीन, फेनिल-एलानीन, ल्यूसीन, वैलीन।

जलअपघटित पदार्थों की भी परीक्षा पत्र क्रोमैटोग्राफीय विधि द्वारा विभिन्न वर्गों के कार्बनिक यौगिकों के लिये उपयुक्त विशिष्ट अभिकर्मकों को फुहार द्वारा छिड़क कर की गई। सिल्वर क्रोमेट और मरक्यूरिक नाइट्रेट-अमोनियम सल्फाइड विधियों से क्रोमेटोग्राम में ऐसे धब्बे स्पष्ट हुये जिनके *Rf* मान एडेनीन, और गुआनीन के समान थे। अमोनियामय सिल्वर नाइट्रेट, और एनीलीन-डाइफेनिलएमीन का प्रयोग ग्लूकोस, फ्रक्टोस, राइबोस , और 2-डिआक्सी राइबोस की पहचान के लिये किया गया। फीनाल हाइपोक्लोराइट ने सभी क्रोमैटोग्रामों में यूरिया के *Rf* मान वाले यौगिक से अभिक्रिया, जबकि डायजोकरण अभिक्रियाओं से बहुत से धब्बे दिखाई पड़े, जिनमें से तीन की पहचान वैनिलिक अम्ल, 3- हाइड्राक्सी बेन्जोइक अम्ल, और 4- हाइड्राक्सीफेनिल ऐसीटिक अम्ल के रूप में की गई।

विभिन्न अनुप्रभावन कालों के अनुसार प्रयोग में लिये गये कार्बनिक यौगिकों का लगभग 1% से 9% तक अन्य पदार्थों में परिणत हो गया।

अवक्षेपों की परीक्षा एन्जाइम-सक्रियता के लिये भी की गई है। अवक्षेपों में एस्टरेस, पेप्टीडेस और फास्फोटेस की परीक्षा सामान्य सूक्ष्म-औषधीय विश्लेषण विधियों द्वारा की गई। कुछ अवक्षेपों में पर्याप्त परिमाण में एस्टरेस सक्रियता, और कुछ अन्य अवक्षेपों में फास्फोटेस सक्रियता पाई गई। सक्रियता की मात्रा बहुत कम थी, परन्तु प्रयोगों को दोहराया जा सकता था, यद्यपि 5 मिनट तक 100° सेन्टीग्रेड पर गरम किये हुये अवक्षेपों में कोई सक्रियता नहीं दिखाई पड़ी। किसी भी अवक्षेप में पेप्टीडेस सक्रियता नहीं दिखाई पड़ी।

उपर्युक्त विधियों द्वारा संश्लेषित सूक्ष्म रचनाओं के माइक्रोस्कोप द्वारा विस्तृत अध्ययन से उनमें एक विशेष आन्तरिक संरचना भी दिखाई पड़ी। बहुतों में वैकुओल (vacuoles), गोलाकार ठोस पदार्थ तथा कोश की दीवार के समान रचनायें दिखाई दीं। कुछ रचनाओं में पराबैंगनी प्रकाश में प्रकाशदीप्ति का गुण दिखाई पड़ा, जब कि कुछ को जीवविज्ञान में प्रयुक्त रंजकों (यथा अम्लीय कार्मीन, एज्यूर II, इयोसीन, हैमेटाक्सिलीन-इयोसीन, जैनस ग्रीन B, मेथिलीन ब्लू, उदासीन रेड निनहाइड्रिन, सैफ़ानीन, और टालुइडीन ब्लू) द्वारा रंजित किया जा सका।

अपने पत्र के अन्त में डा० ब्रिग्स[35] लिखते हैं:—

"0·5 से 15$^{\mu}$ आकार की सूक्ष्म रचनायें, पुरातन जलमण्डल के सदृश्य खनिजीय माध्यम में सरल कार्बनिक यौगिकों के विलयन में, अधिक समय तक प्रकाश के प्रभाव से बन सकती हैं। इनमें से कुछ की बाह्य रचनायें सरल कोशों के समान हैं। इनमें प्रोटोप्लाज्म में पाये जाने वाले तमाम कार्बनिक यौगिक भी होते हैं। कुछ में क्षीण एन्जाइम सक्रियता भी दिखाई पड़ती है। यद्यपि जीवन, तथा जीवित पदार्थ की परिभाषा करना बड़ा कठिन है, परन्तु यह निस्सन्देह कहा जा सकता है, कि ये सूक्ष्म रचनायें जीवित कोशों के बहुत से अभिलक्षणों को पूरा करती हैं। यह सम्भव प्रतीत होता है कि वर्तमान प्रयोगों में प्रेक्षित रचनाओं के ही समान रचनायें सर्वप्रथम पृथ्वी के महासागरों में प्रचुरता से बनीं, और कोशीय जीवन का प्रादुर्भाव इन्हीं से हुआ।"

इस प्रकार डा० ब्रिग्स ने निम्नांकित प्रेक्षणों की पुष्टि की :–

1. प्रकाश-रासायनिक विधि द्वारा ऐमीनो अम्लों का निर्माण।

2. प्रकाश-रासायनिक विधि द्वारा पेप्टाइड का निर्माण।

3. अजैवी पद्धति द्वारा एन्जाइम सक्रिय पदार्थों का निर्माण[39]।

4. उन दशाओं में जीवाणुओं का निर्माण, जो कि संभवतः आदि काल में पृथ्वी के महासागर में उपस्थित थीं, और इस प्रक्रम में प्रकाश की महत्त्वपूर्ण भूमिका[28,32]।

द्विगुणन तथा परिवर्तनशीलता किसी भी जीवित पदार्थ के मूल गुण हैं। न्यूक्लियक अम्लों के अतिरिक्त अन्य अणुओं का द्विगुणन प्रायः देखा गया है, और भौतिक-रसायनज्ञों के अनुसार यह केवल आत्म-उत्प्रेरण है।

आदियुगीन जीवित पदार्थ संभवतः केवल सरल अणुओं के बने होंगे, और उनमें द्विगुणन का प्रक्रम क्वाण्टम यांत्रिकी संस्पन्दन अभिक्रिया के विशेष स्थायित्व बल के द्वारा हुआ होगा। जब विकास के साथ, आदिकालीन जीवित पदार्थों के रचक अणु आकार में बड़े हो गये, जिसके फलस्वरूप प्रबल आणविक बल उत्पन्न हुये, और क्वाण्टम यांत्रिक संस्पन्दन अभिक्रिया बल के द्वारा प्रेरित द्विगुणन प्रक्रम में बाधा पड़ने लगी, तो न्यूक्लियक अम्लों ने इस कार्य को करना प्रारम्भ किया।

इस प्रकार जैविक परिवर्तनशीलता की परिभाषा इस प्रकार की जा सकती है:—यदि किसी जीवित जैविक फ्लास्क में कोई विकार उत्पन्न किया जाये, तो यथासम्भव उसमें ऐसा परिवर्तन होता है, जिससे कि उस विकार का प्रभाव अंशतः नष्ट हो जाये। प्रोटोप्लाज्म तथा कोश की गतिशील प्रकृति के कारण एक जीवित पदार्थ को साम्यावस्था में स्थित एक फ्लास्क माना जा सकता है। यदि परिवर्तनशीलता के उपर्युक्त वर्णन में "जीवित जैविक फ्लास्क" के स्थान पर 'साम्यावस्था में स्थित फ्लास्क" रखा जाये, तो उसका यह रूप हो जाता है:—यदि साम्यावस्था में स्थित किसी फ्लास्क में कोई विकार उत्पन्न किया जाये, तो यथासम्भव फ्लास्क में ऐसा परिवर्तन होता है, जिससे कि उस विकार का प्रभाव अंशतः नष्ट हो जाय। परन्तु यही ल शतालिये का नियम है। इन तथ्यों के प्रकाश में निम्नांकित सामान्य नियम दिया जा सकता है— द्रव्य में द्विगुणन तथा परिवर्तनशीलता के जन्मजात गुण होते हैं, और यदि उपर्युक्त दशायें उत्पन्न कर दी जायें तो द्रव्य के ये गुण प्रकाश में आ जाते हैं, जिसके फलस्वरूप वृद्धि, गणन तथा चयोपचय सक्रियता के गुणों से युक्त आणविक समूहों का निर्माण संभव हो जाता है।

जेन्ट्राब्लाट फर बैक्टीरियालाजी में प्रकाशित (**117**, 567, 574, 1964) अपने शोधपत्र "Synthesis of Jeewanu, the units capable of growth, multiplicationand metabolic activity" भाग में यह कहा है कि हमारे विचार से द्रव्य में द्विगुणन तथा परिवर्तनशीलता के जन्मजात गुण होते हैं, अर्थात् संक्षेप में **द्रव्य में जन्मजात रूप से जीवन है**, और यह केवल कुछ विशेष दशाओं में, जैविक कोटि के गुणों, यथा वृद्धि गुणन और चयोपचय सक्रियता, से युक्त रचनाओं के रूप में प्रकाश में आ जाता है। उपर्युक्त पत्र के पृष्ठ 572 पर अंतिम पैरा का प्रारम्भ इस प्रकार होता है:—

"इस प्रकार विरोधी प्रकृति के विभिन्न प्रक्रमों में यथा विलेयता और अविलेयता, पदार्थों की विलय और जेल अवस्थायें, प्रवेश्यता तथा अप्रवेश्यता, जलयोजन और निर्जलीकरण, अवशोषण और प्रवेश निषेध बिन्दुओं की पदार्थों की परस्पर, तथा वातावरण के पदार्थों के साथ सक्रियता और अक्रियता, इस प्रकार के इन पदार्थों के इन सभी भौतिक-रासायनिक दशाओं पर आश्रित प्रक्रमों में एक ऐसी भी धारा वर्तमान थी, जिसके द्वारा द्रव्य के जन्मजात गुण, द्विगुणन तथा परिवर्तनशीलता भी अपनी भूमिका अदा कर सके, और इसके फलस्वरूप ऐसी इकाइयाँ बनीं जिनमें कि जीवित पदार्थों के गुण यथा वृद्धि, गुणन, और चयोपचय सक्रियता, दिखाई पड़े।,, आगे उसी पत्र के पृष्ठ 573 पर लिखा है:—

"इस प्रकार संक्षेप में, वृद्धि, गुणन और चयोपचय सक्रियता के गुणों से युक्त इकाइयों के उत्पादन का प्रश्न केवल द्रव्य को ऐसी अवस्था में ले आना है, जहाँ उसके जन्मजात गणों का प्रकाशन हो सके, और यह एक डाक्टरी चीड़फाड़ के समान है, जिसमें कि आवश्यक परिवर्तनों के द्वारा केवल वस्तुओं को व्यवस्थित कर दिया जाता है, और शेष कार्य शरीर स्वयं कर लेता है।,,

फिर जेन्ट्राब्लाट फर बैक्टीरियालोजी में प्रकाशित शोधपत्र (**118**, 672-694, 1964) "Coversion of lifeless matter into living system" के पृष्ठ 685 पैरा दो में यह लिखा गया है :—

"इस प्रकार द्रव्य के जन्मजात गुणों, द्विगुणन और परिवर्तन-शीलता, को ध्यान में रखते हुए द्रव्य के ऐसे फ्लास्कों का उत्पादन संभव है जो कि उपयुक्त दशाओं तथा वातावरण के मिलने पर द्विगुणन और परिवर्तन-शीलता के गुण प्रदर्शित करें। ऐसे फ्लास्कों का निर्माण अनेक प्रकार के पदार्थों से किया जाता है, और उसकी वाह्य रचनाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है, और उनके उत्पादन की विधियों का भी वर्णन किया गया है[29, 30, 31, 33]।"

ल्वाफ के कार्य से यह प्रकट है कि विकास के द्वारा अकेले कोष के गुणों में वृद्धि नहीं हुई है, प्रत्युत उसके कुछ गुणों की हानि ही हुई है[40]। परन्तु यह असम्भव लगता है, कि आकस्मिक रूप से उत्पन्न हुआ कोश इस प्रकार अनेक गुणों से युक्त हो जो विकास की प्रगति के साथ केवल घटते गये। इसके स्थान पर एक ऐसे फ्लास्क के निर्माण की कल्पना सरल है, जिसका निर्माण उसके रचक द्रव्य तथा वातावरण के भौतिक-रासायनिक गुणों के कारण हुआ, और फिर उसमें द्रव्य के जन्मजात गुणों, द्विगुणन तथा परिवर्तन-शीलता के कारण वृद्धि, गुणन और चयोपचय सक्रियता के गुण प्रगट हुये।"

उसी शोधपत्र के पृष्ठ 682 पर इकतीसवीं पंक्ति इस प्रकार प्रारम्भ होती है :—

"हमने यह सुझाव दिया है कि एक जीवित फ्लास्क के रचक अणुओं ने उसका निर्माण उपयुक्त दशाओं में केवल अवसरवादिता के कारण नहीं किया है, प्रत्युत उसका निर्माण द्रव्य के जन्मजात गुणों के कारण हुआ है। हमारा विश्वास है कि द्रव्य में अनेक ज्ञात गुणों के अतिरिक्त परिवर्तनशीलता और द्विगुणन ये दो गुण और होते हैं।"

नवम्बर 1963 में तालाहासी में जीवन की उत्पत्ति, और अजैवी पद्धति द्वारा जैविक कोटि के यौगिकों के निर्माण सम्बन्धी विषयों के विभिन्न पक्षों पर विचार करने के लिये एक व्याकुला सभा हुई। सभा का आयोजन एन० ए० एस० ए० की बहिर्जीवविज्ञान शाखा ने डा० फाक्स के तत्वधान में किया था। इस सभा में जीवन की उत्पत्ति के विभिन्न पक्षों पर विवेचना हुई, और इसी सभा में जीवन की उत्पत्ति क्षेत्र में कार्य करने वाले दो महान दिग्गजों, प्रो० ओपेरिन और प्रो० हाल्डेन, की सर्वप्रथम भेंट हुई। प्रो० जे० बी० एस० हाल्डेन इस सभा में भाग लेने के लिये भारत से गये थे। सभा से लौटने पर प्रो० हाल्डेन ने बहादुर को दिनांक 9 अप्रेल 1964 को एक पत्र नं० 64/0019 लिखा :—

"मैं नवम्बर मास के महीने में तालाहासी गया था। मुझे दुख था कि आप वहाँ पर नहीं थे, क्योंकि आपके जीवाणु उनके माइक्रोस्फियर की अपेक्षा कुछ दृष्टियों से जीवन के अधिक निकट हैं"

निर्देश

1. लोएब, डब्लू०। बर० केम० गेस०, 1913, **46**, 690.

2. बहादुर, के०। नेचर, 1954, **173**, 1141.

3. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस० । प्रोसी० नेश० एकैड० साइं० इंडिया, 1954, **23A,** 21-23.

4. वही । काम्प० रेण्ड० पेरिस, 1955, **240,** 246-8.

5. वही । यू० एस० एस० आर० एकैड० सांइ०, 1957, **6,** 754-55.

6. बहादुर के० । "Origin of life on the earth" पर मास्को में 1957, में हुई अन्तर्राष्ट्रीय गोष्ठी की रिपोर्ट, पर्गमान प्रेस, इंग्लिश संस्करण, 1959, पृष्ट 91-96.

7. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस० । प्रोसी० नेश० एकैड० सांइ० इंडिया, 1957, **26A,** ·154,162.

8. बहादुर, के० रंगनायकी, एस० तथा सान्तामेरिया, एल० । नेचर, 1958, **182,** 1668.

9. बहादुर, के०, तथा श्रीवास्तव, आर० बी० । जुर्न० आब्साईकुमू, 1961, XXXI(XCIII), 317-320.

१०. बहादुर, के०, तथा अग्रवाल, के० एम० एल० । जर्न० इण्ड० रिसर्च, इण्डिया, 1962, **21B,** 335-337.

11. बहादुर, के० तथा श्रीवास्तव, आर०बी० विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1962, **5,** 57-59.

12. वही । जर्न एकैड० साइं, यू० एस० एस० आर०, 1962, **9,** 1608.

13. वही । इस्ब, ए० न०, य० एस० एस० आर०आट्ड खिम०, 1963, **6,** 1070.

14. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस० । जर्न०जेन० केमि०, यू० एस० एस० आर०, 1963, **33.**

15. बहादुर, के० तथा अग्रवाल, के० एम० एल० । जर्न० आर्ग० केमि०, यू० एस० एस० आर०,1963 **6,** III, 248.

16. वही । विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1964, **7,** 2,51.

17. हल, डी० ई० । नेचर, 1960, **186,** 693.

18. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस० । — इजवेस्तिया एकैडमी नाउक, यू०एस०एस०आर०, 1958, II, 1361.

19. वही । — प्रोसी० नेश० एकैड० सांइ० इंडिया, 1958, **27A,** 292.

20. वही । — विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1958, **1,** 99.

21. बहादुर के० तथा श्रीवास्तव, आर० बी० । — इण्डि० जर्न० ऐप्ल० केमि०, 1960, **23,** 131.

22. पर्ती, ओ० एन० बहादुर, के० तथा पाठक, एच० डी० । — प्रोसी० नेश० एकै० सांइ० इंडिया, 1961, **30A,** 206.

23. पर्ती, ओ० एन०, बहादुर, के०, तथा पाठक, एच० डी० । — इण्डि० जर्न० ऐप्ल० केमि०, 1961, **25,** 90.

24. वही । — बायोकेमिस्ट्री जर्न०, यू०एस०एस०आर०,वौडी० I4, टी०, 1962, **27,** 708.

25. बहादुर, के० तथा पांडे, आर० एस० । — जर्न० इण्डि० केमि० सोसा०, 1965, **42,** 75.

26. वही । — विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1964, **7,** 57.

27. बहादुर, के० एवं अन्य सहयोगी । — वही, 1963, **6,** 63.

28. बहादुर, के० और रंगनायकी, एस० । — जब्ल० बैक्ट०, 1964, **117,** II, 567.

29. बहादुर, के० । — वही, 1964, **117,** II, 575.

30. वही । — वही, 1964, 117, **II,** 585.

31. पर्ती, ओ० एन० । — आगरा यूनि० जर्न० रिसर्च, 1963, **12,** II, 1.

32. बहादुर, के० । — जब्ल० बैक्ट०, 1964, 118,II, 671.

33. पर्ती, ओ० एन० एवं अन्य सहयोगी । — आगरा यूनि० रिसर्च जर्न०, 1964, **13,** II, 1.

34. बहादुर, के० । "Synthesis of Jeewanu, the Protocell", रामनारायन लाल बेनी प्रसाद, पब्लिशर्स, इलाहाबाद, 1965.

35. ब्रिग्स, एम० एच० । "Experiments on the origin of cells" Space Flight, 1965, 7, (4), 129-131.

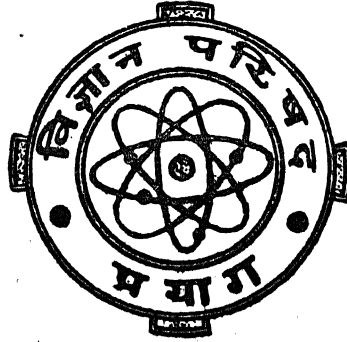
36. वही । The formation of cell like structures by the action of light on a possible primitive earth hydrosphere", प्रकाश जीव विज्ञान की चतुर्थ अन्तर्राष्ट्रीय गोष्ठी में प्रस्तुत । सारांश गोष्ठी की रिपोर्ट में प्रकाशित, "Recent Progress in Photobiology" जुलाई, 1964, पृष्ठ 360.

37. ओपेरिन, ए० आई० । "Origin of life on the earth", एकैडेमिक प्रेस, 1957.

38. फाक्स, एस० डब्लू । "The Origin of prebiological systems", एकैडेमिक प्रेस, 1964.

39. बहादुर, के० तथा सक्सेना, इ० । विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका, 1963, 6, 161.

40. ल्वाफ. ए० । L' evolution physiologique, el les des pertes des fonctions chez les microorganisms, Paris, 1943.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 63-68

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, 10, 63-68

कतिपय अनन्त समाकल–4

डी० सी० गोखरू तथा एस० एन० माथुर

गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 24, 1966]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य लैपलास परिवर्त के एक प्रमेय के व्यवहार द्वारा माइजर के G-फलनों वाले कुछ अनन्त समाकलों का मान ज्ञात करना है। उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में संशोधित बेसेल फलन के द्वितीय प्रकार $K_\nu(x)$ तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन S_4 के लिये कुछ भी रोचक समाकल अंकन प्राप्त किये गये हैं जो नवीन प्रतीत होते हैं।

Absrtact

On some infinite integrals-IV. *By* D. C. Gokhroo & S. N. Mathur, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur, Rajsthan, India.

The object of this paper is to evaluate some infinite integrals involving products of Meijer's G-functions with different arguments by the application of a theorem on Laplace transform. Certain interesting integral representations for modified Bessel function of second kind $K_\nu(x)$ and generalised hypergeometric function S_4 have also been obtained as their particular cases, which are believed to be new.

1. भूमिका : सम्पूर्ण शोधपत्र में सर्वमान्य संकेत $\phi(p) \doteqdot h(t)$ द्वारा लैपलास परिवर्त को अंकित किया जावेगा।

$$\phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt}\, h(t)\, dt, \tag{1}$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $R(p) > 0$.

क्रियात्मक कलन का पार्सेवल गोल्डस्टीन प्रमेय [3, p. 105] यदि

$$\phi_1(p) \doteqdot h_1(t) \quad \text{तथा} \quad \phi_2(p) \doteqdot h_2(t),$$

तो
$$\int_0^\infty t^{-1}\phi_1(t)\, h_2(t)\, dt = \int_0^\infty t^{-1}\,\phi_2(t)\, h_1(t)\, dt \qquad (2)$$

यदि उपर्युक्त समाकलों में से एक पूर्णतः अभिसारी हो।

2. प्रमेय : यदि $\phi(p) \doteqdot h(t)$,

तथा $\psi(p,b) \doteqdot t^{\rho-1}\, e^{b/t} K_\nu(b/t)\, b(t)$,

तो
$$\psi(p,b) = \frac{p \sec \nu\pi}{\sqrt{(\pi)}} \int_0^\infty t^{-\rho}\, (p+t)^{-1}\, G_{13}^{21}\left(2bt \middle| {\frac{1}{2} \atop \nu, -\nu, \rho}\right) \phi(p+t)\, dt, \quad (3)$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|h(t)|$ एवं $|t^{\rho-1}e^{b/t}K_\nu(b/t)h(t)|$ के लैपलास परिवर्त विद्यमान हों, $R(1-\rho\pm\nu)>0$, $R(p)>0$, $R(b)>0$ तथा $h(t)$ b से स्वतन्त्र हो।

उपपत्ति—

$$\phi(p) \doteqdot b(t)$$

$$e^{-at}h(t) \doteqdot \frac{p}{p+a}\phi(p+a),\ R(p+a)>0 \qquad (4)$$

तो क्रियात्मक कलन के ज्ञात गुण के कारण तथा सक्सेना [5, 40] के अनुसार

$$p^\rho e^{b/p} K_\nu(b/p) \doteqdot \frac{\cos \nu\pi}{\sqrt{(\pi)}}\, t^{-\rho}\, G_{13}^{21}\left(2bt \middle| {\frac{1}{2} \atop \nu, -\nu, \rho}\right) \qquad (5)$$

जहाँ $R(1-\rho\pm\nu)>0$, $R(p)>0$ तथा $R(b)>0$.

(4) तथा (5) में (2) का उपयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty e^{-at} t^{\rho-1} e^{b/t} K_\nu(b/t) h(t)\, dt$$

$$= \frac{\cos \nu\pi}{\sqrt{(\pi)}} \int_0^\infty t^{-\rho}\, G_{13}^{21}\left(2bt \middle| {\frac{1}{2} \atop \nu, -\nu, \rho}\right) \frac{\phi(t+a)}{(a+t)}\, dt,$$

प्राप्त होगा। दोनों ओर a से गुणा करने पर तथा a को p में परिवर्तित करने पर कथित प्रमेय की प्राप्ति होती है।

उपप्रमेय 1.

यदि $b=1$ तो ऊपर दिये गये फल को निम्नांकित प्रकार से भी लिखा जा सकता है :–

यदि $$\phi(p) \doteq h(t),$$

तथा $$\psi(p) \doteq t^{\rho-1} e^{1/t} K_\nu(1/t) h(t),$$

तो $$\psi(p) = \frac{p \cos \nu\pi}{\sqrt{(\pi)}} \int_0^\infty t^{-\rho}(t+p)^{-1} G_{13}^{21}\left(2t \middle| {\frac{1}{2} \atop \nu, -\nu, \rho}\right) \phi(t+a)\, dt, \quad (6)$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|h(t)|$ एवं $|t^{\rho-1} e^{1/t} K_\nu(1/t) h(t)|$ के लैपलास परिवर्त विद्यमान हों, $R(p)>0$ तथा $R(1-\rho \pm \nu)>0$.

3. उपयोग : अब हम इस प्रमेय का उपयोग कतिपय अनन्त समाकलों के मान ज्ञात करने के लिये करेंगे जिनमें G-फलनों के गुणनफल निहित हैं।

उदाहरण I. एर्डेल्यी [1, p. 146(29)] से प्रारम्भ करने पर

$$h(t) = t^{-\rho} e^{-a/t}$$

$$\doteq 2a^{(1-\nu)/2} p^{(1+\rho)/2} K_{1-\rho}(2\sqrt{(ap)})$$

$$= \phi(p), \; R(p)>0 \text{ तथा } R(a)>0$$

तथा एर्डेल्यी [1, p. 202(19)]

$$t^{\rho-1} e^{b/t} K_\nu(b/t) h(t) = t^{-1} e^{(a-b)/t} K_\nu(b/t)$$

$$\doteq 2p K_\nu[\sqrt{(p)}\{\sqrt{(a)}+\sqrt{(a-2b)}\}] K_\nu[\{(p)-\sqrt{(a)}-\sqrt{(a-2b)}\}]$$

$$= \psi(p,b), \; R(p)>0 \text{ तथा } R(p)>0.$$

ऊपर की संगतियों में (3) का व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty t^{-\rho}(t+p)^{(\rho-1)/2} K_{1-\rho}\{2\sqrt{(a(p+t))}\} G_{13}^{21}\left(2bt \middle| {\frac{1}{2} \atop \nu, -\nu, \rho}\right) dt$$

$$= \frac{\sqrt{(\pi)} \sec \nu\pi}{a^{(1-\rho)/2}} K_\nu\left[\sqrt{(p)}\{\sqrt{(a)}+\sqrt{(a-2b)}\}\right]$$

$$K_\nu\left[\sqrt{(p)}(\sqrt{\{(a)}-\sqrt{(a-2b)}\}\right], \quad (7)$$

क्योंकि $R(1-\rho\pm\nu>0$, $R(p)>0$ $R(b)>0$ तथा $R(a)>0$.

विशेषतः जब $\rho=\frac{1}{2}$, तो हम एर्डेल्यी का ज्ञात परिणाम [2, p. 132(26)] प्राप्त करते हैं।

उदाहरण II. अब सक्सेना [4, p. 402(11)] के उदाहरण को लेने पर

$$h(t)=t^{-\sigma}e^{-1/t}K_\mu(1/t)$$

$$\doteq\sqrt{(\pi)}p^\sigma G_{13}^{30}\left(2p\Big|{\frac{1}{2} \atop 1-\sigma,\nu,-\nu}\right)$$

$$=\phi(p), \text{ जहाँ } R(p)>0.$$

तथा

$$t^{\rho-1}e^{1/t}K_\nu(1/t)h(t)=t^{\rho-\sigma-1}K_\nu(1/t)K_\mu(1/t)$$

$$\doteq\frac{p^{1+\sigma-\rho}}{2^{2+\sigma-\rho}}G_{26}^{60}\left(\frac{p^2}{4}\Big|{0,\frac{1}{2} \atop \Delta(2;\rho-\sigma),\frac{1}{2}(\nu\pm\mu),\frac{1}{2}(-\nu\pm\mu)}\right)$$

$$=\psi(p), \text{ जहां } R(p)>0.$$

अब $\phi(p)$ तथा $\psi(p)$ के इन मानों को (6) में प्रयुक्त करने पर $t=at$ रखने पर तथा p को ap द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^\infty t^{-\rho}(p+t)^{\sigma-1}G_{13}^{30}\left(2a(p+t)\Big|{\frac{1}{2} \atop 1-\sigma,\mu,-\mu}\right)G_{13}^{21}\left(2at\Big|{\frac{1}{2} \atop \nu,-\nu,\rho}\right)dt$$

$$=\frac{p^{\sigma-\rho}\sec\nu\pi}{2^{2+\sigma-\rho}}G_{26}^{60}\left(\frac{a^2p^2}{4}\Big|{0,\frac{1}{2} \atop \Delta(2;\rho-\sigma),\frac{1}{2}(\nu\pm\mu),\frac{1}{2}(-\nu\pm\mu)}\right)$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(1-\rho\pm\nu)>0$, $R(p)>0$ तथा $R(a)>0$.

विशिष्ट दशायें. यदि $\mu=-\frac{1}{2}$, तो (8) निम्नांकित रूप धारण करेगा

$$\int_0^\infty t^{-\rho}(p+t)^{\sigma/2-3/4}K_{(3/2)-\sigma}\left(2\sqrt{(2a(p+t)}\right)G_{13}^{21}\left(2at\Big|{\frac{1}{2} \atop \nu,-\nu,\rho}\right)dt$$

$$=\frac{\pi\sec\nu\pi p^{\sigma-\rho-1/2}}{2(2a)^{3/4-\sigma/2}}G_{13}^{30}\left(2ap\Big|{\frac{1}{2} \atop \frac{1}{2}+\rho-\sigma,\pm\nu}\right), \qquad (9)$$

जिसमें $\sigma=\rho$ रखने पर हमें $K_\nu(x)$ का रोचक समाकल अंकन प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty t^{-\rho}(p+t)^{\rho/2-3/4}K_{3/2-\rho}(2\sqrt{\{2a(p+t)\}}\, G_{13}^{21}\left(2at\middle|_{\nu,-\nu,\rho}^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{\pi\sec\nu\pi}{\sqrt{(p)}(2a)^{3/4-\rho/2}}K_{2\nu}\{2\sqrt{(2ap)}\}, \quad (10)$$

क्योंकि $R(1-\rho\pm\nu)>0$ तथा $R(p)>0$.

उदाहरण III. अन्त में यदि हम एर्डेल्यी [1, p. 146(29)] को लें

$$b(t)=t^{\mu-1}e^{-1/t}$$

$$\doteqdot 2p^{1-\mu/2}K_\mu\{2\sqrt{(p)}\}$$

$$=\phi(p) \text{ जहाँ } R(p)>0.$$

तथा यदि सक्सेना [4, p. 402(11)] को लें

$$t^{\rho-1}e^{1/t}K_\nu(1/t)h(t)=t^{\rho+\mu-1}K_\nu(1/t)$$

$$\doteqdot\frac{1}{\sqrt{(\pi)}}\left(\frac{2}{p}\right)^{\rho+\mu-1}S_4\left(\frac{\rho+\mu-1}{2},\ \frac{\rho+\mu}{2},\ \frac{\nu}{2},\ \frac{-\nu}{2},\ \frac{p}{4}\right)$$

$$=\psi(p), \text{ जहाँ } R(p)>0.$$

इन मानों को (6) में उपयोग करने पर $t=at$ रखने पर तथा p को ap द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें S_4 का रोचक समाकल अंकन प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty t^{-\rho}(p+t)^{-\mu/2}K_\mu\left(2\sqrt{\{a(p+t)\}}\right)\ G_{13}^{21}\left(2at\middle|_{\nu,-\nu,\rho}^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{\sec\nu\pi\ 2^{\rho+\mu-2}}{p^{\rho+\mu}\ a^{1+\mu/2}}S_4\left(\frac{\rho+\mu-1}{2},\ \frac{\rho+\mu}{2},\ \frac{\nu}{2},\ \frac{-\nu}{2};\ \frac{ap}{4}\right), \quad (11)$$

क्योंकि $R(1-\rho\pm\nu)>0$, $R(p)>0$ तथा $R(b)>0$.

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms, **भाग I** मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
2. वही । Tables of Integral Transforms, **भाग II** मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
3. गोल्डस्टीन, एस० । **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1932, **34**, (2), 103-25.
4. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस, इंडिया**, 1960, **26A**, (4), 400-13.
5. वही । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस, इंडिया**, 1961, **26A**, (1), 38-61.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 69-79

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, 10, 69-79

गास के हाइपरज्यामितीय फलन परिवर्त–2

के० सी० गुप्ता
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

तथा

एम० एस० मित्तल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त —नवम्बर 26, 1966]

सारांश

इस शोध निबन्ध में हमने दो प्रमेयों की स्थापना की है जो गास के हाइपरज्यामितीय फलन परिवर्त एवं लैपलास के सार्वत्रीकृत परिवर्त में घनिष्ट सम्बन्ध प्रदर्शित करते हैं। दो प्रमेयों में से एक के व्यवहार द्वारा मेटलैंड राइट के सार्वत्रीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के लिये एक नवीन समाकल प्रतिदर्श प्राप्त किया गया है। कुछ पूर्व सिद्ध किये गये प्रमेय यहाँ पर सिद्ध किये गये प्रमेयों की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

On Gauss's hypergeometric function transform-II. *By* K. C. Gupta, Department of Mathematics, M.R. Engg. College, Jaipur and S. S. Mittal, Deptt. of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper we establish two theorems exhibiting close connections between Gauss's hypergeometric function transform and a generalized Laplace transform. A new integral representation for Maitland Wright's generalized hypergeometric function has been obtained as an application to one of the theorems. A few theorems obtained earlier follow as special cases of the theorems proved here.

परिचय : हाल ही में राजेन्द्र स्वरूप [5, p. 107] ने गास के हाइपरज्यामितीय फलन परिवर्त के लिये एक प्रतीप सूत्र तथा अद्वितीय प्रमेय प्राप्त किया है जिसे निम्न प्रकार से पारिभाषित किया गया है :

$$G\left\{f(x); k, r; \eta; s\right\} = \frac{\Gamma k \Gamma r}{\Gamma \eta} \int_0^\infty F\binom{k, r}{\eta}; -\frac{x}{s}\Big) f(x)\, dx \quad (1.1)$$

जहाँ $r = \eta$

(1.1) से

$$S\left\{f(x); k; s\right\} = \frac{s^{1-k}}{\Gamma k}\left[G\left\{f(x), k, r; \eta; s\right\}_{\eta=r}\right] \quad (1.2)$$

$$= s \int_0^\infty f(x)(s+x)^{-k}\, dx \quad (1.3)$$

प्राप्त होता है।

$S\{f(x); k; s\}$ को हम सार्वत्रीकृत स्टाइल्जे परिवर्त कहेंगे।

प्रस्तुत शोध निबन्ध का उद्देश्य दो रोचक प्रमेयों को स्थापित करना है जिनमें (1.1) द्वारा पारिभाषित गास का हाइपरज्यामितीय परिवर्त तथा मैनरा [4, p. 23] द्वारा दिये गये निम्नांकित सार्वत्रीकृत लैपलास परिवर्त सम्मिलित हैं

$$W\{f(x); \eta' + \tfrac{1}{2} : k' + \tfrac{1}{2}, r'; s\}$$

$$= s \int_0^\infty (sx)^{-\eta'} e^{-sx/2} W_{k'+1/2}\, r'(sx) f(x)\, dx \quad (1.4)$$

मैटलैण्ड [7, 287] द्वारा किये गये सार्वत्रीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के लिये प्रथम प्रमेय के व्यवहार द्वारा एक रोचक समाकल प्रतिदर्श प्राप्त किया गया है। द्वितीय प्रमेय गुप्ता (2) तथा सक्सेना [6, p. 710] द्वारा प्राप्त दो नये प्रमयों की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं।

2. H-फलन. फाक्स [1, p. 408] द्वारा प्रारम्भ किये गये H-फलन को निम्नांकित प्रकार से अंकित एवं पारिभाषित किया जावेगा।

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \middle| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \ldots\ldots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \ldots\ldots, (b_q, \beta_q) \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2Ki} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - \beta_j - \xi) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j \xi)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \beta_j \xi) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sigma_j \xi)}\, x\xi\, d\xi \quad (2.1)$$

जहाँ x शून्य के बराबर नहीं है तथा रिक्त गुणनफल को इकाई के रूप में लिया गया है। p,q,m,n पूर्ण संख्यायें हैं जिससे $1 \leqslant m < q,\ 0 \leqslant n < p;\ \alpha_j(j=1,\ldots,p), \beta_j(j=1,\ldots,q)$, धन संख्यायें हैं तथा $a_j(j=1,\ldots,p),\ b_j(j=1,\ldots,q)$, संकर संख्यायें हैं जिससे कि $\Gamma(b_h-B_h\xi)(h=1,\ldots,m)$, का एक भी ध्रुव $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)\,(i=1,\ldots,n)$, के ध्रुव से मिलता नहीं, अर्थात्

$$\alpha_i(b_h+\nu) \neq (a_i-\eta=1)\beta_h \tag{2.2}$$

$$(\nu, \eta=0, 1, \ldots;\ h=1,\ldots,m;\ i=1,\ldots,n)$$

साथ ही कन्टूर L, $\sigma-i^{\infty}$ से लेकर $\alpha+i^{\infty}$ तक फैला है जिससे बिन्दु

$$\xi=(b_h+\nu)/\beta_h(h=1,\ldots,m;\ \nu=0,1,\ldots;) \tag{2.3}$$

जो $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$ के ध्रुव हैं, दाहिनी ओर हैं एवं बिन्दु

$$\xi=(a_i-\eta-1)/\alpha_i\ (i=1,\ldots,n;\ \eta=0,1,\ldots;) \tag{2.4}$$

जो $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)$ के ध्रुव हैं L की बाईं ओर हैं। ऐसा कन्टूर (2.2) के कारण सम्भव है। H-फलन सम्बन्धी ये कल्पनायें शोधपत्र में व्यहृत होंगी।

H-फलन के गुण: H-फलन $(a_1, \alpha_1)(a_2, \alpha_2),\ldots,(a_n, \alpha_n)$, युग्मों के लिये तथा उसी प्रकार $(a_{n+1}, \alpha_{n+1}),\ldots,(a_p,\alpha_p)$ में $(b_1, \beta_1),\ldots, (b_m, \beta_m)$ में तथा $(b_{m+1}, \beta_{m+1}),\ldots, (b_q\beta,_q)$ में सममित हैं। यदि $(a_i, \alpha_i)(i=1,\ldots,n)$ में से कोई $(b_j, \beta_j)\,(j=m+1,\ldots,q)$ किसी के तुल्य हो या $(b_m, \beta_h)(h=1,\ldots,m)$ में से कोई $(c_j\ \alpha_j)\,(j=n+1,\ldots,p)$ के किसी के तुल्य हो तो H-फलन निम्न कोटि में परिवर्तित हो जाता है, अर्थात् p, q तथा n (या m) इकाई से घटते हैं। नीचे हम ऐसे एक परिवर्तित (संकुचित) सूत्र को दे रहे हैं।

(a)

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),(a_2,\alpha_2),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),(b_2,\beta_2),\ldots,(b_{q-1},\beta_{q-1})(a_1,\alpha_1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=H_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left[x\left|\begin{matrix}(a_2,\alpha_2),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_{q-1},\beta_{q-1})\end{matrix}\right.\right] \tag{2.5}$$

दूसरे संकुचित सूत्र भी इसी प्रकार होंगे।

(2.1) में दाहिनी ओर के समाकल में चर के स्पष्ट परिवर्तनों से हमें निम्नांकित परिणाम प्राप्त होगा :

(b)

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),(a_2,\alpha_2),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),(b_2,\beta_2),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right]$$

$$=cH_{p,q}^{m,n}\left[x^c\middle|\begin{matrix}(a_1,c\alpha_1),(a_2,c\alpha_2),\ldots,(a_p,c\alpha_p)\\(b_1,c\beta_1),(b_2,c\beta_2),\ldots,(b_q,c\beta_q)\end{matrix}\right] \tag{2.6}$$

जहाँ $c>0$.

(c)

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),(a_2,\alpha_2),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b,\beta_1),(b_2,\beta_2),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{matrix}\right]$$

$$=H_{q,p}^{n,m}\left[x^{-1}\middle|\begin{matrix}(1-b_1,\beta_1),(1-b_2,\beta_2),\ldots,(1-b_q,\beta_q)\\(1-a_1,\alpha_1),(1-a_2,\alpha_2),\ldots,(1-a_p,\alpha_p)\end{matrix}\right] \tag{2.7}$$

H-फलन की निम्नांकित विशिष्ट दशाओं को हममें से एक लेखक ने [3] इंगित किया है :

(1) $$H_{p,q}^{m,n}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,1),(a_2,1),\ldots,(a_p,1)\\(b_1,1),(b_2,1),\ldots,(b_q,1)\end{matrix}\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[x\middle|\begin{matrix}a_1\ a_2,\ldots,a_p\\b_1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix}\right] \tag{2.8}$$

(2.8) के दाहिनी ओर का फलन चिरपरिचित माइजर के G-फलन को दर्शित करता है।

(2) $$H_{h+k,l+r}^{l,h}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1),(a_2,\alpha_2),\ldots,(a_h,\alpha_h),(b_1,\beta_1),)b_2,\beta_2),\ldots,(b_k,\beta_k)\\c_1,r_1),(c_2,r_2),\ldots,(c_l,r_l),(d_1,\delta_1),(d_2,\delta_2),\ldots,(d_r,\delta_r)\end{matrix}\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{h}(\alpha_j)^{1/2-a_j}\prod_{j=1}^{k}(\beta_j)^{1/2-b_j}\prod_{j=1}^{l}(r_j)^{c_j-1/2}\prod_{j=1}^{r}(\delta_j)^{d_j-1/2}(2\pi)^{[h+l-k-r-A-C+B+D]}$$

$$\times G^{C\,.\,A}_{A+B,\,C+D}\left[\frac{\prod_{j=1}^{h}(\alpha_j)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{k}(\beta_j)^{\beta_j}}{\prod_{j=1}^{l}(r_j)^{r_j}\prod_{j=1}^{r}(\delta_j)^{\delta_j}}\,x\,\middle|\,\begin{matrix}\{\triangle(\alpha_h,a_h)\},\{\triangle(\beta_k,b_k)\}\\ \{\triangle(r_l,c_l)\},\{\triangle(\delta_r,d_r)\}\end{matrix}\right]$$

जहाँ l,h,k तथा r पूर्ण संख्यायें हैं जिससे $1\leqslant l;\ 0\leqslant h;\ 0\leqslant k;\ O\leqslant r$ तथा $a_1,a_2,\ldots,a_h;$ $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k;\ \gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_l;\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_r$ धन पूर्ण संख्यायें हैं। निम्नांकित संक्षिप्त रूप प्रयुक्त होंगे।

$$A=\sum_{j=1}^{h}(a_j);\ B=\sum_{j=1}^{k}(\beta_j);\ C=\sum_{j=1}^{l}(\gamma_j);$$

$$D=\sum_{j=1}^{r}(\delta_j);\triangle(\alpha_1,a_1)=\frac{a_1}{\alpha_1},\frac{a_1+1}{\alpha_1},\ldots,\frac{a_1+\alpha_1-1}{\alpha_1}$$

$$\text{तथा}\ \{\triangle(\alpha_p,a_p)\}=\triangle(\alpha_1,a_1),\ \triangle(\alpha_2,a_2),\ldots,\triangle(\alpha_p,a_p).$$

$\{(a_p,\alpha_p)\}$ संकेत से जो बोध होता है वह $(a_1,\alpha_1),\ (a_2,\alpha_2),\ldots,(a_p,\alpha_p)$ युग्मों के लिये होगा।

$$\text{(3)}\qquad \sum\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j r)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_l r)}\frac{(-\kappa)^r}{r!}$$

श्रेणी द्वारा पारिभाषित फलन पर मैटलैंड [7, p. 287] द्वारा विस्तार से विचार किया जा चुका है। इसे हम मैटलैंड का सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन कह कर पुकारेंगे और सांकेतिक रूप में

$${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix};-x\right]=H^{1,p}_{p,q+1}\left[x\middle|\begin{matrix}\{(1-a_p,\alpha_p)\}\\ (0,1),\{(1-b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right]\qquad(2.10)$$

द्वारा प्रदर्शित करेंगे ।

3. निम्नांकित परिणामों [3] को बाद की विवेचना में उपयोग किया जावेगा ।

(a) $$W\left\{x^l H^{m,n}_{p,q}\left[zx^{\sigma}\middle|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right];\eta'+\tfrac{1}{2};k'+\tfrac{1}{2},r';s\right\}$$

$$=s^{-l} H^{m,n+\alpha}_{p+2,q+1}\left[zs^{-\sigma}\middle|\begin{matrix}(\eta'-l\pm r',\sigma)\{(a_p,\alpha_p)\}\\\{b_q,\beta_q)\},(\eta'+k'-l,\sigma)\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

यदि $\sigma>0$ $R(s)>0$, $R(\rho-\eta'\pm r'+1+\sigma\min b_h/\beta_h)>0(h=1,2,\ldots,m)$

$$\lambda=\sum_{j=1}^{n}(a_j)-\sum_{j=n+1}^{p}(a_j)+\sum_{j=1}^{m}(\beta_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(\beta_j)>0 \text{ तथा } |\arg x|<\tfrac{1}{2}\lambda\pi.$$

(3.1) की निम्नांकित विशिष्ट दशायें क्रमशः (2.10) तथा 2.7) के कारण अनुसरण करती हैं जिनकी बाद में आवश्यकता पड़ेगी ।

(b) $$\frac{\Gamma k\Gamma r}{\Gamma\eta}s^{-l}F\left(\begin{matrix}k,r\\\eta\end{matrix};-\frac{s^{-\sigma}}{a}\right)$$

$$=W\left\{x^l{}_3\psi_3\left[\begin{matrix}1-\eta'-k'+l,\sigma),(k,1,)(.r,1)\\(\eta,1),(1-\eta'+l\pm r',\sigma)\end{matrix};(-1/ax)^{\sigma}\right];\eta'+\tfrac{1}{2};k'+\tfrac{1}{2},r';s\right\} \tag{3.2}$$

जहाँ $R(s)>0$, $R(l-\eta'\pm r'+1)>0$, $0<\sigma<2$ तथा $|\arg a|<(2-\sigma)\pi/2$

(c) $$\frac{\Gamma k\Gamma r}{\Gamma\eta}s^{-l}F\left(\begin{matrix}k,r\\\eta\end{matrix};-\frac{s^{\sigma}}{a}\right)$$

$$=W\left\{x^l H^{2,2}_{4,3}\left[\frac{x^{-\sigma}}{a}\middle|\begin{matrix}(1-k,1),(1-r,1),(1+l-\eta'r'\pm,\sigma)\\(1+l-k'-\eta',\sigma),(0,1)'(1-\eta,1)\end{matrix}\right];\eta'+\tfrac{1}{2};k'+\tfrac{1}{2};r';s\right\} \tag{3.3}$$

जहाँ $R(s)>0$, $R(l-\eta'\pm r'+1+\sigma_i)>0(i=k,r)$ $0<\sigma<2$

तथा $|\arg a|<(2-\sigma)\pi/2$

$$(d) \quad s^l H^{m,n}_{p,q}\left[zs^\sigma \middle| \begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right]$$

$$=G\left\{x^{l-1} H^{m+1,n}_{p+2,q+2}\left[zx^\sigma \middle| \begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\},(k-t,\sigma),(r-l,\sigma)\\ (\eta-l,\sigma),\{(b_q,\beta_q)\},(1-l,\sigma)\end{matrix}\right];k,r;\eta;s\right\} \tag{3.4}$$

यदि $R(l+\sigma \min (b_h/\beta_h))>0 \ (h=1,2,\ldots,m) \ R(\eta)>0, \ \sigma>0,$

$$R\left(l+\sigma \max \frac{a_j-1)}{\alpha_j}-i\right)<0 \ (j=1,2,\ldots,n;i=k,r)$$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi(\lambda-2\sigma)$

जहाँ λ द्वारा (3.1) में उल्लिखित संख्यायें व्यक्त होती हैं।

4. प्रमेय 1

यदि $W\{x^\rho f(x^\sigma);\ \eta'+\frac{1}{2};\ k'+\frac{1}{2},r';\ s\}=h(s)$ (4.1)

तथा $G\{x^{[(l-\rho)/\sigma]-1}f(1/x);\ k,r;\eta;\ s\}=\phi(s)$

$$\text{तो } \phi(s)=\sigma \int_0^\infty x^{l-1}\ {}_3\psi_3\left[\begin{matrix}(1-\eta'-k'+l,\sigma),(k,1),(r,1)\\ (\eta,1),(1-\eta'+l\pm r',\sigma)\end{matrix};\ -\frac{1}{s}x^\sigma\right]h(x)\,dx \tag{4.2}$$

यदि $|x^\rho f(x^\sigma)|$ का मैनरा परिवर्त तथा $|x^{[(l-\rho)/\sigma]-1}f(1/x)|$ का गाँस का हाइपरज्यामितीय परिवर्त विद्यमान हो और यदि (4.2) द्वारा व्यक्त समाकल पूर्णतः अभिसारी हो।

उपपत्ति. मैनरा [4, p. 125] ने (1.4) द्वारा व्यक्त परिवर्त के लिये एक प्रमेय सिद्ध किया है जो लैपलास परिवर्त के लिये पार्सेवाल गोल्डस्टीन प्रमेय के अनुरूप है। मैनरा के प्रमेय का वक्तव्य है कि

यदि $W\{\phi_1(x);\ \eta'+\frac{1}{2};\ k'+\frac{1}{2},\ r';\ s\}=f_1(s)$

तथा $W\{\phi_2(x);\ \eta'+\frac{1}{2};\ k'+\frac{1}{2},\ r';\ s\}=f_2(s)$

$$\text{तो } \int_0^\infty \frac{\phi_1(x)f_2(x)}{x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\phi_2(x)f_1(x)}{x}\,dx \tag{4.3}$$

यदि (4.3) में से एक समाकल पूर्ण रूप से अभिसारी हो तथा $|\phi_1(x)|$ एवं $|\phi_2(x)|$ के मैनरा परिवर्त विद्यमान हों। इस प्रमेय को (3.2) तथा (4.1) द्वारा व्यक्त युग्मों में प्रयुक्त करने पर हमें

$$\frac{\Gamma k\Gamma r}{\Gamma\eta}\int_0^\infty x^{-l-1+\rho}\,F\binom{k,r}{\eta}\,;\frac{x^{-\sigma}}{a}\Big)f(x^\sigma)\,dx$$

$$=\int_0^\infty x^{l-1}\,{}_3\psi_3\left[\begin{matrix}(1-\eta'-k'+l,\sigma),\,(k,1),(r,1)\\(\eta,1),(1-\eta'+l\pm r',\sigma)\end{matrix}\,;-\frac{1}{a}x^\sigma\right]h(x)\,dx \tag{4.4}$$

प्राप्त होगा। (4.4) में a को S द्वारा प्रतिस्थापित करके थोड़ा हल करने पर वाञ्छित फल की प्राप्ति होती है।

उपप्रमेय 1. प्रमेय 1 में $\eta'=k'$ तथा $K'=\pm r'$ रखने पर हमें

यदि $L\{x^\rho f(x^\sigma)\,;s\}=h(s)$

तथा $G\{x^{[(l-\rho)/\sigma-1]}f(1/x);\,k,r:\eta\,;s\}=\phi(x)$

$$\text{तो } \phi(s)=\sigma\int_0^\infty x^{l-1}\,{}_2\psi_2\left[\begin{matrix}(k,1),\,(r,1)\\(\eta,1),\,(1+l,\sigma)\end{matrix}\,;-\left(\frac{1}{s}\right)x^\sigma\right]h(x,dx) \tag{4.5}$$

यदि $|x^\rho f(x^\sigma)|$ का लैपलास परिवर्त तथा $|x^{[(l-\rho)/\sigma]-1}f(1/x)|$ का गास का हाइपरज्यामितीय परिवर्त विद्यमान हो तथा (4.5) द्वारा व्यक्त समाकल पूर्णतः अभिसारी हो।

उपप्रमेय 2. यदि ऊपर के प्रमेय में हम $\eta=r$ रखें तो (1.2) तथा (1.3) के द्वारा हमें निम्नांकित उपप्रमेय प्राप्त होगी :

यदि $W\{x^\rho f(x^\sigma);\,\eta'+\tfrac{1}{2};\,k'+\tfrac{1}{2},r';\,s\}=h(s)$

तथा $S\{x^{[(l-\rho)/\sigma]-1}f(1/x);\,k;\,s\}=\phi(s)$

$$\text{तो } \phi(s)=\frac{s^{1-k}}{\Gamma k}\,\sigma\int_0^\infty x^{l-1}\,{}_2\psi_2\left[\begin{matrix}(1-\eta'-k+l,\sigma)\ (k,1)\\(1-\eta'\pm l\pm r',\sigma)\end{matrix}\,;-(1/s)x^\sigma\right]h(x)\,dx \tag{4.6}$$

यदि $|x^\rho f(x^\sigma)|$ के मैनरा परिवर्त तथा $|x^{[(l-\rho)/\sigma]-1}f(1/x)|$ के सार्वत्रीकृत स्टाइल्जे परिवर्त विद्यमान हों तथा (4.6) द्वारा दिया जाने वाला समाकल पूर्णतः अभिसारी हो।

गुप्ता[2] ने (4.6) को भिन्न रूप में प्रस्तुत किया है।

उदाहरण 1. प्रमेय 1 में $\phi(s)={}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_p,\beta_q)\}\end{matrix};-zs\right]$ रखने पर (2.10) तथा (3.4)

समीकरणों के बल पर हमें

$$x^{[(l-\rho)/\sigma]-1}f(1/x)=x^{-1}H^{2,p}_{p+2,q+3}\left[zx\left|\begin{matrix}\{(1-a_p,\alpha_p)\},(k,1),(r,1)\\ (\eta,1),(0,1),\{(1-b_q,\beta_q)\},(1,1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$x^{\rho}+(x^{\alpha})=x^{l}H^{p,2}_{q+3,p+2}\left[\frac{x^{\sigma}}{z}\left|\begin{matrix}(1-\eta,1),(1,1),\{(b_q,\beta_q)\},(0,1)\\ \{(a_p,\alpha_p)\},(1-k,1),(1-r,1)\end{matrix}\right.\right]$$

प्राप्त होता है । अतः (3.1) से

$$h(s)=s^{-l}H^{p,4}_{q+5,p+3}\left[\frac{s^{-\sigma}}{z}\left|\begin{matrix}(\eta'-l\pm r',\sigma),(1-\eta,1),(1,1),\{(b_q,\beta_q)\},(0,1)\\ \{(a_p,\alpha_p)\},(1-k,1),(1-r,1),(\eta'+k'-l,\sigma)\end{matrix}\right.\right]$$

प्राप्त होगा यदि (3.1) में प्राप्य दशायें संतुष्ट हो सकें । इस प्रकार से प्राप्त $h(s)$ तथा $\phi(s)$ के मानों को प्रमेय 1 में रखने पर हमें थोड़े सरलीकरण के पश्चात् निम्नांकित रोचक फल प्राप्त होगा

$$\int_0^{\infty}x^{-1}{}_3\psi_3\left[\begin{matrix}(1-\eta'-k'+l,\sigma),(k,1),(r,1)\\ (\eta,1),(1-\eta'+l\pm r',\sigma)\end{matrix};-\frac{k}{s}\right]$$

$$\times H^{4,p}_{p+3,q+5}\left[zx\left|\begin{matrix}\{(1-a_p,\alpha_p)\},(k,1)\ (r,1),(1-\eta'-k'+1,\sigma)\\ (1-\eta'+l\pm r'\ \sigma),(\eta,1),(0,1),\{(1-b_q\beta_q)\},(1,1)\}\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$={}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q\ \}\end{matrix};-zs\right]$$

जहां $R(s)>0;\ 0<\sigma<2;\ \lambda=\sigma-1+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j-\sum_{j=1}^{q}\beta_j>0;\ |\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi;$

$R(1+l-\eta'\pm r')>0;\ R(\eta)>0;\ R\{\eta'+k'-l-1-(a_i/\alpha_i)\sigma\}<0;$

$R\{k+(a_i/\alpha_i)\}>0;\ R\{r+(a_i/\alpha_j)\}>0(i=1,2,\ldots,p).$

5. प्रमेय 2.

यदि $W\{x^{\rho} f(x^{\sigma})\,;\, \eta'+\tfrac{1}{2} : k'+\tfrac{1}{2},\, r'\,;\, s\}=h(s)$ (5.1)

तथा $G\{x^{[(\rho-l/\alpha)]-1} f(x)\,;\, k, r\,;\, \eta\,;\, s\}=\phi(s)$

तो $$\phi(s)=\sigma \int_0^{\infty} x^{l-1} H_{4,3}^{2,2}\left[\frac{x^{-\sigma}}{s}\middle|\begin{matrix}(1-k,1)\ (1-r,1),(1+l-\eta'\pm r',\sigma)\\(1+l-k'-\eta',\sigma)\ (0,1),(1-\eta,1)\end{matrix}\right] h(x)\, dx \tag{5.2}$$

यदि $|x^{\rho} f(x^{\sigma})|$ को मैनरा परिवर्त तथा $|x^{[(\rho-l/\sigma)]-1} f(x)|$ के गास का हाइपरज्यामितीय परिवर्त विद्यमान हो तथा (5.2) द्वारा दिया जाने वाला समाकल पूर्णतः अभिसारी हो।

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिये (3.3) तथा (5.1) द्वारा व्यक्त युग्मों का व्यवहार करना चाहिए तथा प्रमेय 1 की भाँति अग्रसर होना चाहिए।

उपप्रमेय 1. प्रमेय 2 में $\eta'=k'$ तथा $k'=\pm r'$ रखने पर

यदि $L\{x^{\rho} f(x^{\sigma})\,;\, s\}=h(s)$

तथा $G\{x^{[(\rho-l/\sigma)]-1} f(x)\,;\, k, r\,; \eta\,;\, s\}=\phi(s)$

तो $$\phi(s)=\sigma \int_1^{\infty} x^{l-1} H_{3,2}^{1,2}\left[\frac{x^{-\sigma}}{s}\middle|\begin{matrix}(1-k,1),(1-r,1),(1+l,\sigma)\\(0,1),(1-\eta,1)\end{matrix}\right] h(x)\, dx \tag{5.3}$$

यदि $|x^{\rho} f(x^{\sigma})|$ का लैपलास परिवर्त तथा $|x^{[(\rho-l/\sigma)]-1} f(x)|$ का गास का हाइपरज्यामितीय परिवर्त विद्यमान हों तथा (5.3) द्वारा व्यक्त समाकल पूर्णतः अभिसारी हो।

उपप्रमेय 2. यदि प्रमेय 2 में $\eta=r$ रखें तो (1.2) तथा (1.3) के बल पर हमें निम्नांकित सहायक प्रमेय प्राप्त होगी।

यदि $W\{x^{\rho} f(x^{\sigma})\,;\, \eta'+\tfrac{1}{2}\,;\, k'+\tfrac{1}{2}, r'\,;\, s\}=h(s)$

तथा $S\{x^{[(\rho-l/\sigma)]-1} f(x)\,;\, k\,;\, s\}=\phi(s)$

तो $$\phi(s)=\frac{s^{1-k}}{\Gamma k}\,\sigma \int_0^{\infty} x^{l-1} H_{3,2}^{2,1}\left[\frac{x^{-\sigma}}{s}\middle|\begin{matrix}(1-k,1),(1+l-\eta'\pm r',\sigma\\(1+l-k'-\eta',\sigma),(0,1)\end{matrix}\right] h(x)\, du \tag{5.4}$$

यदि $|x^{\rho} f(x^{\sigma})|$ के मैनरा परिवर्त तथा $|x^{[(\rho-l/\sigma)]-1} f(x)|$ के सार्वत्रीकृत स्टाइल्जे परिवर्तन विद्यमान हों तथा (5.4) द्वारा व्यक्त समाकल पूर्णतः अभिसारी हो।

उपप्रमेय 3. यदि हम उपर्युक्त सहायक प्रमेय में $\sigma=(N/S)$, $\eta'=-r'$ रखें तथा k' को $k'-\tfrac{1}{2}$ द्वारा प्रतिस्थापित करें तो (2.5) (2.6) तथा (2.7) सम्बन्धों द्वारा हमें प्रसिद्ध प्रमेय [6, p. 712] प्राप्त होगी।

निर्देश

1. फाक्स, सी० । **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
2. गुप्ता, के० सी० । **पी०-एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**, 1966.
3. गुप्ता, के० सी तथा जैन, यू० सी० । **प्रोसी० नेश० एके० सांइ, इंडिया (स्वीकृत)** ।
4. मैनरा, वी० पी० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1961, **53**, 23-31.
5. राजेन्द्र स्वरूप । Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles, 1964, **78**, 105-112.
6. सक्सेना, आर० के० तथा गुप्ता, के० सी० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी सांइ०, इंडिया**, 1964, **30-A**, 707-714.
7. राइट, ई० एम० । **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1935, **10**, 286-293.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 81-89

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 81-89

कुछ अनन्त समाकल एवं व्हिटेकर फलन का एक समाकल निरूपण

डी० सी० गोखरू

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त--जून 25, 1966]

सारांश

लैपलास परिवर्त के एक प्रमेय का उपयोग करते हुये कतिपय अनन्त समाकलों का मान निकाला गया है, जिनमें व्हिटेकर, पैरावलिक सिलिंडर, तथा माइजर के G-फलन के गुणनफलन निहित हैं। व्हिटेकर फलन का एक समाकल निरूपण भी प्राप्त किया गया है। प्राप्त परिणाम अत्यन्त सामान्य हैं तथा इससे पूर्व सक्सेना द्वारा प्राप्त परिणामों [4, p. 46] को सन्निवेश करते हैं।

Abstract

Some infinite integrals and an integral representation for Whittaker function. *By* D. C. Gokhroo, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur, (India).

In this paper, few infinite integrals involving products of Whittaker, parabolic cylinder and Meijer's G-functions have been evaluated by making use of a theorem on Laplace transform. An integral representation for Whittaker function has also been obtained. The results obtained are quite general and includes the results given earlier by Saxena [4, p. 46].

1. विषय प्रवेश:—प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य लैपलास परिवर्त पर एक प्रमेय को सिद्ध करना तथा व्हिटेकर, पैरावलिक सिलिंडर तथा माइजर के G-फलनों के गुणनफलों के कतिपय समाकलों का इस प्रमेय को उपयोग करते हुये तर्कों द्वारा मान निकालना है। सक्सेना [4, p. 46] द्वारा प्राप्त एक अनन्त समाकल हमारे परिणाम की विशिष्ट दशा के रूप में निकलता है। व्हिटेकर फलन का एक समाकल निरूपण भी प्राप्त किया गया है। प्राप्त परिणाम रोचक हैं और ऐसी आशा है कि उनमें से कुछ नवीन भी हों।

पूरे शोधपत्र में $\phi(p) \doteq h(t)$, मान्य संक्षेप को लैपलास के परिवर्त

$$(1) \qquad \phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\,h(t)\,dt,$$

को सूचित करने के लिये प्रयुक्त किया जावेगा, यदि यह समाकल अभिसारी हो तथा $R(p)>0$.

2. प्रमेय I. यदि $\phi(p)\doteq h(t)$,

तथा
$$\psi(p)\doteq t^{\mu-1}\,K_\nu(2b^{1/2}\,t^{n/2s})\,h(t),$$

तो

$$(2) \qquad \psi(p)=\frac{p(2\pi)^{(1+n-2s)/2}}{2n^{11/2-\mu}}\int_0^\infty t^{-\mu}\,G^{2s,0}_{n,2s}\left(\frac{n^n b^s}{t^n s^{2s}}\middle|\begin{matrix}\triangle(n;\,1-\mu)\\ \triangle(s;\pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right)(p+t)^{-1}\,\phi(p+1)\,dt,$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|h(t)|$ एवं $|t^{\mu-1}\,K_\nu(2b^{1/2}t^{(n/2s)})h(t)|$ के लैपलास परिवर्त विद्यमान हों, $|\arg b^s|<\{s-n/2\}\pi$, $|\arg p|<\pi$, $2s>n$, तथा $h(t)$ b पर आधारित न हों।

उपपत्ति $\because \qquad \phi(p)\doteq h(t),$

$$\therefore \qquad e^{-at}\,h(t)\doteq\frac{p}{p+a}\,\phi(p+a),$$

(3) जहाँ $R(a+p)>0$, (प्रसिद्ध गुणधर्म के अनसार)। तथा सक्सेना [4, p. 40]

$$(4) \quad 2p^\mu\,K_\nu(2b^{1/2}p^{n/2s})\doteq\frac{n^{-\mu-1/2}t^{-\mu}}{(2n)^{1/2(2s-n-1)}}\,G^{2s,0}_{n,2s}\left(\frac{n^n b^s}{t^n s^{2s}}\middle|\begin{matrix}\triangle(n;1-\mu)\\ \triangle(s;\pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right),$$

जहाँ $|\arg b^s|<(s-n/2)\pi$, $R(p)>0$ तथा $2s>n$.

क्रियात्मक कलन को पार्सेवाल गोल्डस्टीन प्रमेय [2, p. 105] को (3) तथा (4) में व्यवहृत करने पर, जिसके अनुसार यदि

$$\phi_1(p)\doteq h_1(t) \text{ तथा } \phi_2(p)\doteq h_2(t),$$

तो

$$(5) \qquad \int_0^\infty \phi_1(t)\,h_2(t)\,t^{-1}\,dt=\int_0^\infty t^{-1}\phi_2(t)\,h_1(t)\,dt,$$

हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-at} K_\nu(2b^{1/2} t^{n/2s})\, h(t)\, dt = \frac{(2\pi)^{(n-2s+1)/2}}{n^{1/2-\mu}} \int_0^\infty t^{-1}(t+a)^{-1}$$

$$\times G_{n,2s}^{2s,0}\left(\frac{n^n b^s}{t^n s^{2s}}\middle| \begin{matrix}\triangle(n;1-\mu)\\ \triangle(s;\pm\frac{1}{2}\nu)\end{matrix}\right) \phi(t+a)\, dt,$$

दोनों ओर a से गणा करने पर तथा a को p में बदलने पर कथित परिणाम प्राप्त होगा।

उपप्रमेय I. यदि $n=s=1$, तो यह सक्सेना [5, p. 233] द्वारा प्रस्तुत परिणाम में परिवर्तित हो जाता है जिससे कि

$$\phi(p) \doteq h(t),$$

तथा $\psi(p) \doteq t^{\mu-1} K_\nu(2\sqrt{(bt)}\, h(t)$, तो

$$(6) \qquad \psi(p) = \frac{p}{2\sqrt{b}} \int_0^\infty t^{1/2-\mu} e^{-1/2\times b/t}\, W_{\mu-1/2,\, \nu/2}(b/t)(p+t)^{-1} \phi(p+t)\, dt,$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|h(t)|$ और $|t^{\mu-1} K_\nu(2\sqrt{(bt)}\, h(t)|$, लैपलास परिवर्त विद्यमान हों $R(p)>0$, $R(b)>0$ तथा $h(t)$ b पर आधारित नहीं हो।

उपप्रमेय II. $v=\frac{1}{2}$ रखने पर, b को $\frac{1}{4}b^2$ द्वारा तथा μ को $\mu+\frac{3}{4}$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर (6) रूपान्तरित हो जाता हो

यदि $\qquad \phi(p) \doteq h(t),$

तथा $\qquad \psi(p) \doteq t^{\mu-1/2} e^{-b\sqrt{t}}\, h(t),$

तो

$$(7) \qquad \psi(p) = \frac{p}{\sqrt{(\pi)}2^\mu} \int_0^\infty t^{-\mu-1/2} e^{-b^2/8t} D_{2\mu}\left(\frac{6}{\sqrt{(2t)}}\right)(p+t)^{-1} \phi(p+t)\, dt,$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|h(t)|$ और $|t^{\mu-1/2} e^{-b\sqrt{(t)}}\, h(t)|$ के लैपलास परिवर्त विद्यमान हों $R(p)>0$, $R(b)>0$ तथा $h(t)$ b पर आधारित न हों।

जब $b=1$ तो (6) तथा (7) को निम्नांकित प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:

यदि $\phi(p) \risingdotseq h(t)$,

तथा $\psi(p) \risingdotseq t^{\mu-1} K_\nu (2\sqrt{(t)}\, h(t)$,

तो

$$(8) \qquad \psi(p) = \frac{p}{2} \int_0^\infty t^{1/2-\mu} (p+t)^{-1/2 \times 1/t} c^{-1/2 \times 1/t} W_{\mu-1/2\ \nu/2}(1/t)\, \phi(p+t)\, dt,$$

यदि समाकल अभिसारी हो तथा $|h(t)|$ और $|t^{\mu-1} K_\nu\{2\sqrt{(t)}\} h(t)|$ के लैपलास परिवर्त विद्यमान हों तथा $R(p) > 0$.

यदि $\phi(p) \risingdotseq h(t)$,

तथा $\psi(p) \risingdotseq t^{\mu-1/2}\, e^{-\sqrt{(t)}}\, h(t)$,

तो

$$(9) \qquad \psi(p) = \frac{p}{\sqrt{(\pi 2^\mu)}} \int_0^\infty t^{-\mu-1/2} (p+l)^{-1} e^{-1/8t} D_{2\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{(2t)}}\right) \phi(p+t)\, dt,$$

यदि समाकल अभिसारी हो और $|h(t)|$ तथा $|t^{\mu-1/2}\, e^{-\sqrt{(t)}}\, h(t)|$ के लैपलास परिवर्त विद्यमान हों तथा $R(p) > 0$.

3. अब हम (8) तथा (9) की सहायता से पैरावलिक सिलिंडर तथा माइजर के G-फलनों के गुणनफल वाले कतिपय अनन्त समाकलों का मान विभिन्न तर्कों के द्वारा निकालेंगे। व्हिटकर फलन का एक रोचक समाकल निरूपण भी प्राप्त किया गया है।

उदाहरण 1. एर्डेल्यी [1, p. 199(37)] का उदाहरण लेने पर

$$\begin{aligned} h(t) &= t^\rho k_\lambda\{2\sqrt{t}\} \\ &\risingdotseq \frac{\Gamma(1+\rho \pm \frac{1}{2}\lambda)}{2p^{\rho-1/2}} e^{1/2 \times 1/p}\, W_{-\rho-1/2,\ \lambda/2}\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= \phi(p), \text{ जहाँ } R(1+\rho \pm \lambda/2) > 0 \text{ तथा } R(p) > 0. \end{aligned}$$

तथा सक्सेना [3, p. 402(11)] का उदाहरण

$$t^{\mu-1} K_\nu\{2\sqrt{(t)}\} h(t) = t^{\rho+\mu-1} K_\mu\{2\sqrt{(t)}\} K_\lambda\{2\sqrt{(t)}\}$$

$$\doteq \frac{\sqrt{(\pi p)}}{2^{2\rho+2\mu+1}} E\left(\begin{matrix}\rho+\mu+\frac{1}{2}(\nu\pm\lambda), \rho+\mu+\frac{1}{2}+(-\nu\pm\lambda) \\ \rho+\mu,\ \rho+\mu+\frac{1}{2}\end{matrix} ;\ \frac{4}{p}\right)$$

$$=\psi(p), \text{ जहाँ } R(\rho+\mu\pm\nu/2\pm\lambda/2)>0 \text{ तथा } R(p)>0.$$

(8) में $\phi(p)$ तथा $\psi(p)$ के इन मानों को प्रयुक्त करने पर, $t=(1/a)\,t$ रखने पर तथा p को $(1/a)\,p$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर यह देखा गया कि

$$(10) \qquad \int_0^\infty t^{1/2-\mu}(p+t)^{-\rho-1/2}\, e^{a(1/p+t)-1/t)]/2}\, W_{\mu-1/2\ \ \nu/2}\left(\frac{a}{t}\right)$$

$$W_{-\rho-1/2,\ \lambda/2}\left(\frac{a}{p+t}\right) dt$$

$$=\frac{\sqrt{(\pi)}(2a)^{1-\rho-\mu}}{\Gamma(2+\rho\pm\lambda/2)\, 2^{\rho+\mu}} E\left(\begin{matrix}\rho+\mu+\frac{1}{2}(\nu\pm\lambda),\ \rho+\mu+\frac{1}{2}(-\nu\pm\lambda) \\ \rho+\mu,\ \rho+\mu+\frac{1}{2}\end{matrix} ;\ \frac{4}{p}\right),$$

$R(\rho+\mu\pm\nu/2\pm\lambda/2)>0$, $R(p)0$ तथा$a>0$ के लिय विहित है।

विशेष दशा में यदि $\nu=\frac{1}{2}$, तो p को p^2 द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा चर में थोड़ा परिवर्तन करने पर (10) का रूप

$$(11) \qquad \int_0^\infty t^{3/2-2\mu}(t^2+p^2)^{-1/2-\rho}\, e^{-ap^2/[2t^2(p^2+t^2)]}\, D_{2\mu-3/2}\left(\frac{\sqrt{(2a)}}{t}\right)$$

$$W_{-\rho-1/2,\ \lambda/2}\left(\frac{a}{p^2+t^2}\right) dt$$

$$=\frac{\sqrt{(\pi)}(2a)^{3/4-\rho-\mu}}{\Gamma(1+\rho\pm\lambda/2)2^{\rho+3/2}} E\left(\begin{matrix}\rho+\mu\pm\lambda/2+\frac{1}{4},\ \rho+\mu\pm\lambda/2-\frac{1}{4} \\ \rho+\mu,\ \rho+\mu+\frac{1}{2}\end{matrix} ;\ \frac{4a}{p^2}\right),$$

होगा जो $R(\rho+\mu\pm\lambda/2)>\frac{1}{4}$, $R(p>0$ तथा $a>0$, के लिये विहित है।

पुनः $\lambda=\frac{1}{2}$ रखने पर तथा ρ को $\rho-\frac{3}{4}$, μ को $\mu+\frac{1}{4}$ तथा p को 1, द्वारा प्रतिस्थापित करने पर सक्सेना [4, p. 46(33)] का परिणाम प्राप्त होता है।

उदाहरण 2. अब एर्डेल्यी को [1, p. 197(20)] पुनः लेने पर

$$h(t)=t^{\rho-1/2}\, I_\lambda\{2\sqrt{(t)}\}$$

$$\doteqdot\frac{\Gamma\frac{1}{2}(1+\lambda\pm2\rho)p^{1-\rho}}{\Gamma(1+\lambda)}\, M_{-\rho,\lambda/2}\left(\frac{1}{p}\right)$$

$=\phi(p)$, जहाँ $R(1+\lambda+2\rho)>0$ तथा $R(p)>0$.

तथा सक्सेना [3, p. 402(11)]

$$t^{\mu-1}K_\nu\{2\sqrt{(t)}\}h(t)=t^{\mu+\rho-3/2}K_\nu\{2\sqrt{(t)}\}I_\lambda\{2\sqrt{(t)}\}$$

$$\doteqdot\frac{p^{3/2-\rho-\mu}}{2\sqrt{(\pi)}}\, G^{2,3}_{3,4}\left(\frac{4}{p}\middle|\begin{matrix}\frac{3}{2}-\rho-\mu,\,0,\,\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\lambda\pm\nu),\,\frac{1}{2}(-\lambda\pm\nu)\end{matrix}\right)$$

$=\psi(p)$, जहाँ $R(\mu+\rho\pm\nu/2+\lambda/2)>\frac{1}{2}$ तथा $R(p)>0$.

ऊपर की संगतियों को (8) में व्यवहृत करने पर, $t=(1/a)\,t$ रखने पर तथा p को $(1/a)\,p$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$(12)\qquad \int_0^\infty t^{1/2-\mu}\,(t+p)^{-\rho}\,e^{-1/2\times a/t}\,W_{\mu-1/2,\,\nu/2}\left(\frac{a}{t}\right)M_{-\rho,\,\lambda/2}\left(\frac{a}{p+t}\right)dt$$

$$=\frac{\Gamma(1+\lambda)\,ap^{1/2-\rho-\mu)}}{\Gamma(\rho+\lambda/2+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\,G^{2,3}_{3,4}\left(\frac{4a}{p}\middle|\begin{matrix}\frac{3}{2}-\rho-\mu,\,0,\,\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\lambda\pm\nu),\,\frac{1}{2}(-\lambda\pm\frac{1}{2})\end{matrix}\right),$$

जो $R(\mu+\rho\pm\nu/2+\lambda/2)>\frac{1}{2}$, $R(p)>0$ तथा $a>0$ के लिये विहित है।

विशेष दशा में यदि हम $\nu=\frac{1}{2}$ लें, p को p^2 द्वारा प्रतिस्थापित करें और चर में थोड़ा परिवर्तन करदें तो (12) का रूप

$$(13)\qquad \int_0^\infty t^{3/2-2\mu}\,(p^2+t^2)^{-\rho}\,e^{-a/2t^2}\,D_{2\mu-3/2}\left(\frac{\sqrt{(2a)}}{t}\right)M_{-\rho,\,\lambda/2}\left(\frac{a}{p^2+t^2}\right)dt$$

$$=\frac{\Gamma(1+\lambda)\,ap^{1-2\rho-2\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\rho+\lambda/2)2^{7/4-\mu}}\,G^{2,3}_{3,4}\left(\frac{4a}{p^2}\middle|\begin{matrix}\frac{3}{2}-\rho-\mu,\,0,\,\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\lambda\pm\frac{1}{2}),\,\frac{1}{2}(-\lambda\pm\frac{1}{2})\end{matrix}\right),$$

होगा जो $R(\mu+\rho+\lambda/2)>\frac{3}{4}$, $R(p)>0$ तथा $a>0$ के लिये विहित है।

उदाहरण 3. सक्सेना [3, p. 402(11)] के उदाहरण से प्रारम्भ करने पर

$$h(t)=t^{-\rho}\,e^{\sqrt{(t)}}K_\lambda\{\sqrt{t}\}$$

$$\doteqdot \frac{\cos\lambda\pi\, p^\rho}{\pi^2\, 2^{3/2}}\, G^{4,3}_{3,4}\left(\frac{1}{p}\middle|\begin{matrix}\rho,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\\ \lambda/2,\ \frac{1}{2}+\lambda/2,\ -\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)$$

$$=\phi(p),\ \text{जहाँ } R(1-\rho\pm\lambda/2)>0 \text{ तथा } R(p)>0.$$

तथा एर्डेल्यी [1, p. 199(37)] के अनुसार

$$t^{\mu-1}e^{-\sqrt{(t)}}\,h(t)=t^{\mu-\rho-1/2}K_\lambda\sqrt{t}$$

$$\doteqdot \frac{\Gamma(\mu-\rho+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\lambda)}{p^{\mu-\rho-1}}\, e^{1/8p}\, W_{\rho-\mu,\ \frac{1}{2}\lambda}\left(\frac{1}{4p}\right)$$

$$=\psi(p),\ \text{जहाँ } R(\mu-\rho\pm\lambda/2+\tfrac{1}{2})>0 \text{ तथा } R(p)>0.$$

उपर्युक्त संगति को (9) में प्रयुक्त करने पर, $t=t^2/a^2$ रखने पर तथा p को p^2/a^2 द्वारा प्रतिस्थापित करने पर व्हिटेकर फलन का एक रोचक समाकल निरूपण प्राप्त होता है:

$$(1\quad \int^\infty t^{-2\mu}(p^2+t^2)^{\rho-1}e^{-a^2}\quad D_{2\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{t}\right)$$

$$\times G^{4,3}_{3,4}\left(\frac{a^2}{p^2+t^2}\middle|\begin{matrix}\rho,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\\ \lambda/2,\ (1+\lambda)/2,\ -\lambda/2,\ (1-\lambda)/2\end{matrix}\right)dt$$

$$=\frac{\Gamma(\mu-\rho\pm\lambda/2+\frac{1}{2})\pi^{5/2}\,2^{\mu-1/2}}{\cos\lambda D\, p^{2\mu-2\sigma}\,a}\, e^{a^2/8p^2}\, W_{\rho-\mu,\ \lambda/2}\left(\frac{a^2}{4p^2}\right),$$

जो $R(\mu-\rho\pm\lambda/2+\frac{1}{2})>0$, $R(p)>0$ तथा $a>0$ के लिये विहित है और जो $\rho=\mu$ रखने पर द्वितीय प्रकार के संशोधित बेसिल फलन के संगत समाकल निरूपण के रूप में बदल जाता है

$$(15)\quad \int_0^\infty t^{-2\mu}(p^2+t^2)^{\mu-1}e^{-a^2/8t^2}D_{2\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a}{t}\right)$$

$$\times G^{4,3}_{3,4}\left(\frac{a^2}{p^2+t^2}\middle|\begin{matrix}\mu,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\\ \lambda/2,\ (1+\lambda)/2,\ -\lambda/2,\ (1+\lambda)/2\end{matrix}\right)dt$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\pm\lambda/2)\pi^2 2^{\mu-1/2}}{\cos\lambda\pi\, p}\, e^{a^2/8p^2} K_{\lambda/2}\left(\frac{a^2}{8p^2}\right),$$

जो $R(p)>0$, $a>0$ तथा $-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{1}{2}$ के लिये विहित है।

उदाहरण 4. अन्त में [3, p. 402(11)] लेने पर

$$h(t)=t^{-\sigma} e^{1/2\sqrt{t}} W_{k,m}\{\sqrt{t}\}$$

$$\doteq\frac{p^{\sigma}\pi^{-3/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)\, 2^{k+1}}\, G^{4,3}_{3,4}\left(\frac{1}{4p}\middle|\begin{matrix}\rho,\ (1+k)/2,\ (2+k)/2\\ \frac{1}{4}\pm m/2,\ \frac{3}{4}\pm m/2\end{matrix}\right)$$

$$=\phi(p),\ \text{जहाँ}\ R(\tfrac{5}{4}-\rho\pm m)>0\ \text{तथा}\ R(p)>0.$$

तथा साथ ही

$$t^{\mu-1/2} e^{-\sqrt{t}} h(t)=t^{\mu-\rho-1/2} e^{-1/2\sqrt{t}} W_{k,m}\sqrt{t}$$

$$\doteq\frac{p\, 2^{1+k+2\mu-2\rho}}{\sqrt{\pi}}\, E\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}+\mu-\rho\pm m/2,\ \frac{5}{4}+\mu-\rho\pm m/2\\ 1+\mu-\rho-k/2,\ \frac{3}{2}+\mu-\rho-k/2\end{matrix};\frac{1}{4p}\right)$$

$$=\psi(p),\ \text{जहाँ}\ R(\mu-\rho\pm m/2+\tfrac{3}{4})>0\ \text{तथा}\ R(p)>0.$$

ऊपर की संगतियों में (9) को व्यवहृत करने पर, $t=t^2/a^2$ रखने पर तथा p को p^2/a^2 द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$(16)\quad \int_0^{\infty} t^{-2\mu}(p^2+t^2)^{\rho-1} e^{-a^2/8t^2} D_{2\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a}{t}\right)$$

$$\times G^{4,3}_{3,4}\left(\frac{a^2}{4(p^2+t^2)}\middle|\begin{matrix}\rho,\ (1+k)/2,\ (2+k)/2\\ \frac{1}{4}\pm m/2,\ \frac{3}{4}\pm m/2\end{matrix}\right)dt$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k\pm m/2)\pi^{3/2}\, 2^{3\mu-2\rho+2k+2}}{a^{1+2\mu-2\rho}}\, E\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}+\mu-\rho\pm m/2,\ \frac{5}{4}+\mu-\rho\pm m/2\\ 1+\mu-\rho-k/2,\ \frac{3}{2}+\mu-\rho-k/2\end{matrix};\frac{a^2}{4p^2}\right),$$

प्राप्त होगा जो $R(\mu-\rho\pm m/2+\frac{3}{4})>0$, $R(p)>0$ तथा $a>0$ के लिये विहित है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० सी० बी० राठी का अत्यन्त कृतज्ञ है जिन्होंने इस शोध निबन्ध की तैयारी में पथ-दर्शन किया। जोधपुर विश्वविद्यालय के प्रो० के० एन० मेहरा भी धन्यवाद के पात्र हैं जिन्होंने कार्य करने की सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral transforms, **भाग** 1, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

2. गोल्डस्टीन, एस० । **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1932, **34**, (2), 103-25.

3. सक्सेना, आर० के० । **प्रोसी० नेश० इंस्टी० सांइस, इंडिया**, 1960, **26**, (4), 400-13.

4. वही । **प्रोसी०नेश०इंस्टी० सांइस, इंडिया**, 1961, **27**,(1), 38-61.

5. वही । **प्रोसी०नेश०इंस्टी०सांइस, इंडिया**, 1964, **30**,(2), 230-34.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 91-97

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 91-97

H–फलन वाले मीजर के बेसेल फलन परिवर्त की शृंखला

यू० सी० जैन

उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त—जून 3, 1966]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य मीजर के बेसेल फलन परिवर्त के लिये दो शृंखलायें स्थापित करना है। इन शृंखलाओं में H-फलन निहित है जिनसे राठी के द्वारा प्राप्त परिणामों का सार्वत्रीकरण होता है।

Abstract

On chains for Meijer's Bessel function transform involving the H-function. *By* U.C. Jain, University of Udaipur, Udaipur (India).

The purpose of this note is to establish two chains for Meijer's Bessel function transform. These chains involve the H-function and generalise the results of Rathie.

1. परिचय

यदि
$$f(p)=p\int_0^\infty e^{-px}h(x)\,dx \text{ तो हम} \tag{1.1}$$

$$f(p)\doteqdot h(x)$$

और यदि
$$\phi(p)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}p\cdot\int_0^\infty (px)^{1/2}k_\nu(px)\,h(x)\,dx \text{ हो तो हम} \tag{1.2}$$

$$\phi(p)\underset{\nu}{\overset{k}{=}}h(x) \text{ लिखेंगे।}$$

मीजर [5] के अनुसार (1.1) का सार्वत्रीकरण (1.2) है तथा यदि $v=\pm\frac{1}{2}$

तो
$$K_{\pm 1/2}(x)=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2x}\right)}e^{-x}$$

सम्बन्ध के द्वारा यह (1.1) का रूप धारण कर लेगा ।

(1.1) में $f(p)$, $h(x)$ का प्रतिबिम्ब है और यह मौलिक के नाम से विख्यात है। निम्नांकित संक्षिप्त रूप प्रयुक्त होंगे

(1) $$(a \pm b, c) = (a+b, c), (a-b, c)$$

(2) $$\{(a_p, \alpha_p)\} = (a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$$

(3) $$\triangle(N, \alpha) = \frac{\alpha}{N}, \frac{\alpha+1}{N}, \ldots, \frac{\alpha+N-1}{N}$$

(4) $$\{\triangle(N, \alpha), \beta\} = \left(\frac{\alpha}{N}, \beta\right), \left(\frac{\alpha+1}{N}, \beta\right), \ldots, \left(\frac{\alpha+N-1}{N}, \beta\right)$$

2. H-फलन : फाक्स [2, p. 408] द्वारा प्रचारित H-फलन को गप्ता [3, p. 98] की ही भाँति हम निम्न प्रकार से प्रदर्शित और पारिभाषित करेंगे ।

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), \ldots, (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_1^m \Gamma(b_j - \beta_j \xi) \prod_1^n \Gamma(1 - a_j + \alpha_j \xi)}{\prod_{m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j \xi) \prod_{n+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j \xi)} \, x^{\xi} \, d\xi \tag{2.1}$$

जहाँ x शून्य के बराबर नहीं है तथा रिक्त गणनफल इकाई के बराबर मान लिया गया है । p, q, m, n ऐसी पूर्ण संख्यायें हैं जिससे $1 \leqslant m \leqslant q$; $0 \leqslant n \leqslant p$;

$\alpha_j (j=1, \ldots, p)$; $\beta_j (j=1, \ldots, q)$ धन संख्यायें हैं तथा

$a_j (j=1, \ldots, p)$; $b_j (j=1, \ldots, q)$ ऐसी संकर संख्यायें हैं कि

$\Gamma(b_h - \beta_h \xi) (h=1, \ldots, m)$ का कोई भी ध्रुव $\Gamma(1 - a_i + \alpha_i \xi)$ $i=1, \ldots, n)$

के एक भी ध्रुव से मिलता नहीं, अर्थात्

$$\alpha_i (b_h + \nu) \neq (a_i - \eta - 1) \beta_h \tag{2.2}$$

$(\nu, \eta=0, 1, \ldots, h=1, \ldots, m; i=1, \ldots, n)$

साथ ही कन्टूर $L \sigma - i\infty$ से $\sigma + i\infty$ तक फैला है जिससे कि

$$\xi=(b_h+\nu)/\beta_h \; (h=1, \ldots, m; \; \nu=0, 1, \ldots;) \tag{2.3}$$

बिन्दु $\Gamma(b_h-\beta_h\xi)$, के ध्रुव हो जाते हैं और दाहिनी ओर रहते हैं

तथा
$$\xi=(a_i-\eta-1)/\alpha_i (i=1, \ldots, n; \; \eta=0, 1, \ldots;) \tag{2.4}$$

बिन्दु जो $\Gamma(1-a_i+\alpha_i\xi)$, के ध्रुव हैं वे L के बाईं ओर रहते हैं। ऐसा कन्टूर (2.2) के कारण सम्भव है।

3. आगे आने वाले (4, समीकरण 5.1, 2.5, 4.4, 2.3) में निम्नांकित फलों की आवश्यकता होगी :—

$$\int_0^\infty x^{\eta-1} \; H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma \left|\begin{matrix}\{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] . H_{r,l}^{k,f}\left[sx \left|\begin{matrix}\{(cr,\gamma r)\} \\ \{(dl,\delta l)\}\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=s^{-\eta} \; H_{p+l,q+r}^{m+f,n+k}\left[\frac{z}{s^\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_n,\alpha_n)\},\{(1-dl-\eta\delta l, \sigma\delta l)\},(a_{n+1},\alpha_{n+1}),\ldots,(a_p,\alpha_p) \\ \{(b_m,\beta_m)\},\{(1-c_r-\eta\gamma_r,\sigma\gamma_r)\},(b_{m+1}\;\beta_{m+1}),\ldots,(b_q,\beta_q\end{matrix}\right.\right]$$

यदि $R(\eta+\sigma \min b_h/\beta_h+\min d_i/\delta_i)>0(h=1, \ldots, m; \; i=1, \ldots, k)$, $R(\eta+\max (c_j-1)/\gamma_i+\sigma \max (a_h'-1)/\alpha_h')<0 \; (j=1, \ldots, f; \; h'=1, \ldots, n)$, $\sigma>0, \; \lambda>0, \lambda'>0, \; |\arg z|<\frac{1}{2}\lambda\pi$ तथा $|\arg s|<\frac{1}{2}\lambda'\pi$, जहाँ λ तथा λ' के द्वारा क्रमशः

$$\sum_1^m (\beta_j)-\sum_{m+1}^q (\beta_j)+\sum_1^n (\alpha_j)-\sum_{n+1}^p (\alpha_j) \; ; \; \sum_1^k (\delta_j)-\sum_{k+1}^l (\delta_j+\sum_1^f (\gamma_j)-\sum_{f+1}^r (\gamma_j).$$

संख्याओं का बोध होता है।

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\} \\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]=(2\pi)^{p/2+q/2-m-n} \, 2^{\mu+1}$$

$$=H_{2p,2q}^{2m,2n}\left[x^2 \, 2^{-2\delta}\left|\begin{matrix}(a_1/2, \alpha_1), (a_1+1/2, \alpha_1), \ldots, (a_p/2,\alpha_p),\{(a_p+1)/2,\alpha_p)\} \\ (b_1/2, \beta_1),(b_1+1)/2,\beta_1), \ldots, (b_q/2, \beta_q),\{(b_q+1)/2, \beta_q)\}\end{matrix}\right.\right] \tag{3.2}$$

जहाँ μ तथा δ निम्नांकित संख्याओं के लिये आये हैं

$$\sum_1^q (b_j) - \sum_1^p (a_j) + \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}q; \quad \sum_1^q (\beta_j) - \sum_1^p (\alpha_j)$$

$$x^l k_\nu(x) = 2^{l-1} H_{0,2}^{2,0}\left[\frac{x^2}{4}\middle| (\tfrac{1}{2}l \pm \tfrac{1}{2}\nu, 1) \right] \tag{3.3}$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x^{-1}\middle|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right] = H_{q,p}^{n,m}\left[x\middle|\begin{matrix}\{(1-b_q,\beta_q\}\\ \{(1-a_p,\alpha_p\}\end{matrix}\right] \tag{3.4}$$

4. प्रमेय 1

यदि

$$\phi_1(p) \underset{\nu_1}{\overset{k}{=}} f(x) \tag{4.1}$$

$$\phi_2(p) \underset{\nu_2}{\overset{k}{=}} x^l \phi_1(x^{-\sigma}) \tag{4.2}$$

$$\phi_3(p) \underset{\nu_3}{\overset{k}{=}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} . x^{1/2} \phi_2\left(\frac{1}{4x^2}\right) \tag{4.3}$$

$$\phi_4(p) \underset{\nu_4}{\overset{k}{=}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} \phi_3\left(\frac{1}{4x^2}\right) \tag{4.4}$$

. . . .

$$\phi_n(p) \underset{\nu_n}{\overset{k}{=}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} \phi_{n-1}\left(\frac{1}{4x^2}\right) \tag{4.5}$$

तथा

$$\phi_n\left(\frac{{}^2 p}{4}\right) = 2(\alpha)^{5/2} p^{1-\alpha(1+\beta)} \prod_{i=2}^{n} \left\{2^{-1+[(7+3\beta-3i)/2]\,\delta}\, \pi^{-\delta}\right\}$$

तो

$$\int^\infty x^{3\alpha-1} f(x^{2\alpha}) \quad H_{0,4\alpha}^{4\alpha,0}\left[\frac{(px^\sigma)^{4\alpha}}{4\prod_{i=2}^{n}\{(8\delta)^{2\delta\sigma}\}}\middle| (\pm \tfrac{1}{2}\nu_1, 1), \left\{\Delta\left(1, \frac{3+\beta\pm 2\nu_2}{4}\right), \sigma\right\}, \ldots,\right.$$

$$\left\{\triangle\left(2^{n-2}, \frac{2+(\beta+1)\alpha\pm2\nu_n}{4}\right), \sigma\right\}\Bigg] dx \quad (4.6)$$

जहाँ $\sigma>0$, β, α तथा δ द्वारा क्रमशः $(2l-3\sigma)$, 2^{n-2} तथा 2^{i-2} $(i=2,\ldots,n)$ मात्राय व्यक्त होती हैं ; $R(p)>0$, $R(\frac{3}{2}+\nu_r)>0$, $|\phi_r(p)|$ की विद्यमानता $(r=1,\ldots,n)$ तथा $|x^{3\delta/2-1}f(x^{\delta})|\in L(0,\infty)$

उपपत्ति :—(1.2) के द्वारा (4.1) की व्याख्या करने पर तथा (4.2) में $|\phi_1(x^{-\sigma})|$ के मान को रखने पर समाकल के क्रम को उलटने पर हमें

$$\phi_2(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right).p^{3/2}\int_0^\infty x^{1/2} f(x) \int_0^\infty t^{3\sigma/2-5/2-l}\, k_{\nu_1}(xt^{\sigma}) \,.\, k_{\nu_2}(p/t)\, dt\,.\,dx \quad (4.7)$$

प्राप्त होगा। (3.1) के द्वारा t-समाकल का मान निकालने पर तथा $p^2/4$ के द्वारा p को और x^2 द्वारा x को स्थानापन्न करने पर

$$\phi_2(p^2/4)=\pi^{-1}\,.\,2^{3\beta/2+1/2}\,p^{-\beta}\int_0^\infty x^2 f(x^2)$$

$$\times H_{0,4}^{4,0}\left[\frac{x^4p^{4\sigma}}{4^{3\sigma+1}}\middle|(\pm\tfrac{1}{2}\nu_1, 1), \left\{\triangle\left(1, \frac{3+\beta\pm2\nu_2}{4}\right), \sigma\right\}\right] dx \quad (4.8)$$

(4.7) में समाकलन के क्रम के प्रतीपन को तर्कसंगत बनाने के लिये हम देखते हैं कि x-समाकल पूर्ण-रूपेण अभिसारी है जब $|x^{1/2}k_{\nu_1}(x)f(x)|\in L(0,\infty)$ तथा t-समाकल पूर्णतः अभिसारी हों; यदि $R(p)>\frac{1}{2}$. अन्त में पुनारावृत्त समाकल पूर्णतः अभिसारी होता है जब $\phi_2(p)$ विद्यमान हो। चूंकि ऊपर दी गई ये समस्त दशायें प्रमेय के साथ ही सम्मिलित हैं अतः (4.7) के समाकलन क्रम का प्रतीपन डी ला वाली पूसिन के प्रमेय [1, p. 504] द्वारा तर्कसंगत है।

अब यदि हम (4.7) से (4.3) में $\phi_2(1/4x^2)$ का मान रखें, इस प्रकार से प्राप्त फल में समाकलन के क्रम को उलट दें तथा (3.1) एवं (3.2) के द्वारा आन्तरिक समाकल का मान निकालें तो हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होगा :

$$\phi_3(p^2/4)=\pi^{-3}\,2^{4+11\beta/2}\,p^{-2\beta-1}\int_0^\infty x^5 f(x^4)$$

$$\times H_{0,8}^{8,0}\left[\frac{x^8 p^{8\sigma}}{4^{11\sigma+1}}\middle|(\pm\tfrac{1}{2}\nu_1,\ 1),\left\{\Delta\left(1,\frac{3+\beta\pm 2\nu_2}{4}\right),\sigma\right\},\right.$$

$$\left.\left\{\Delta\left(2,\frac{4+2\beta\pm 2\nu_3}{4}\right),\sigma\right\}\right]dx.$$

इस क्रिया को (4.4) के साथ क्रमशः दुहराते रहने पर हमें वांछित फल प्राप्त होगा ।

यदि उक्त प्रमेय में $\sigma=1$ तथा $l=-\frac{1}{2}$ मान लें तो हमें राठी [7, p. 172] का परिणाम प्राप्त होगा ।

5. प्रमेय 2.

यदि $$\phi(p)\underset{\nu_1}{\overset{k}{=}}f_1(x) \tag{5.1}$$

$$p^l f_1(p^{-\sigma})\underset{\nu_2}{\overset{k}{=}}f_2(x) \tag{5.2}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2} f_2\left(\frac{1}{4p^2}\right)\underset{\nu_3}{\overset{k}{=}}f_3(x) \tag{5.3}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2} f_3\left(\frac{1}{4p^2}\right)\underset{\nu_4}{\overset{k}{=}}f_4(x) \tag{5.4}$$

. . . .

तथा $$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{p}\right) f_{n-1}\left(\frac{1}{4p^2}\right)\underset{\nu_n}{\overset{k}{=}}f_n(x) \tag{5.5}$$

तो $$\phi(p)=\sigma\, 2^{1+l/\sigma}\,(a)^{5/2} p^{3/2-l/\sigma}\prod_{i=2}^{n}\left\{2^{-1+[(7-9\sigma-3i)/2]\delta}\,(\delta)^{\delta(2-3\sigma/2)}\pi^{-\delta}\right\}$$

$$\times\int_0^\infty x^{\alpha(3\sigma-1)} f_n\left(\frac{x^2}{4}\right) H_{0,4\alpha}^{4\alpha,0}\left[\frac{p^2 x^{4\alpha\sigma}}{4\prod_{i=2}^{n}\{(8\delta)^{2\delta\sigma}\}}\middle|\left(\pm\tfrac{1}{2}\nu_1+\frac{l}{2a},1\right)\left(\pm\tfrac{1}{2}\nu_2,\sigma\right),\right.$$

$$\left\{\triangle\left(2, \frac{-1\pm\nu_3}{2}\right),\sigma\right\}, \ldots, \left\{\triangle\left(2^{n-2}, \frac{1-\alpha\pm\nu_n}{2}\right), \sigma\right\}\Bigg] dx \tag{5.6}$$

जहाँ α तथा δ द्वारा क्रमशः 2^{n-2} और 2^{i-2} $(i=2, \ldots, n)$ मात्राओं का बोध होता है; $R(p)>0$, $\sigma>0$ तथा $|f_r(x)|$ $(r=1,2, \ldots, n)$ के माइजर परिवर्त सभी विद्यमान हैं।

उपपत्तिः—प्रमेय 2 को प्रमेय 1 की भाँति सिद्ध करेंगे। प्रमेय 2 में $\sigma=1$ तथा $l=\frac{1}{2}$ रखने पर राठी [6, p. 46] द्वारा दी गई अन्य श्रृंखला प्राप्त होगी

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत विषय को सुझाने के लिये लेखक डा० के० सी० गुप्ता का ऋणी है। डा० एस० पी० कौशिक ने जो सहायता की है उसके लिये भी लेखक आभार प्रदर्शित करता है।

निर्देश

1. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए०। Infinite series, **मैकमिलन, न्यूयार्क**, 1955.
2. फाक्स सी०। **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
3. गुप्ता, के० सी०। Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles, 1965, **79**, 97-106.
4. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०। **प्रोसी० नेश० एके० सांइस, इंडिया**, 1966, (स्वीकृत)
5. माइजर, सी० एस०। **प्रोसी० कान० नेडरलै० एकेड० वेटेंश**, 1940, **43**, 599-608.
6. राठी, पी० एन०। **प्रोसी० नेश० एके० साइ०, इंडिया**, 1965, **35A**, 43-52.
7. वही। Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles, 1964, **78**, 171-174.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, 10, 99-106

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, 10, 99-106

अनेक चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों वाले ज्ञात समाकल

एस० एल० कल्ला

गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—सितम्बर 26, 1966]

सारांश

इस शोध निबन्ध का उद्देश्य क्रियात्मक कलन के विख्यात प्रमेय के उपयोग द्वारा कुछ ज्ञात समाकलों का मान निकालना है जिनमें लारिसेला के हाइपरज्यामितीय फलन, *Fc*, संगमी हाइपरज्यामितीय फलन, ψ_2, तथा सरन द्वारा पारिभाषित तीन चरों वाले सर्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन सन्निहित हैं।

Abstract

Finite integrals involving generalized hypergeometric functions of several variables. *By* S. L. Kalla, Department of Mathematics, M.R. Engineering College, Jaipur.

The object of this note is to evaluate some finite integrals, involving Lauricella's hypergeometric function, Fc, confluent hypergeometric function, ψ_2, and generalized hypergeometric functions of three variables defined by Saran, by utilizing a well-known theorem of operational calculus.

1. हमारे शोध में निम्नांकित परिणाम [7, p. 35] की आवश्यकता होगी।

(1.1) यदि $f(t) \doteqdot \phi(p)$

(1.2) तो $$\frac{f(t)}{t} \doteqdot p \int_p^\infty \frac{\phi(p)}{p}\, dp.$$

जहाँ $p>0$ तथा (1.1) चिरसम्मत लैपलास परिवर्त का सांकेतिक चिह्न है

(1.3) $$\phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt.$$

$$R(p)>0.$$

प्रस्तुत शोध का उद्देश्य परिणाम (1.2) के उपयोग से कुछ ऐसे निश्चित समाकलों को प्राप्त करना है जिनमें n चरों वाले लारिसेला के हाइपरज्यामितीय फलन, Fc[1, p. 114] संगमी हाइपरज्यामितीय फलन, ψ_2[1, p. 134] तथा सक्सेना [8, p. 84] द्वारा पारिभाषित सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन सन्निहित हैं।

2. इस अनभाग में हम Fc तथा ψ_2 वाले ज्ञात समाकलों का मान ज्ञात करेंगे।

यदि हम $f(t)=t^{\nu-1}\prod_{i=1}^{n}\mathcal{J}_{2\mu_i}(2a_i^{1/2}t^{1/2})$ लें तो [5, p. 187]

$$(2.1)\qquad \phi(p)=\frac{\Gamma(\nu+M)\,p^{1-\nu-M}\,a_1^{\mu_1}\ldots a_n^{\mu_n}}{\Gamma(2\mu_1+1),\ldots,\Gamma(2\mu_n+1)}$$

$$\times\psi_2\left(\nu+M;2\mu_1+1,\ldots,2\mu_n+1;-\frac{a_1}{p},\ldots,-\frac{a_n}{p}\right)$$

जहाँ $M=\mu_1+\ldots,+\mu_n$, $R(p)>0$ तथा $R(\nu+M)>0$.

(1.2) का व्यवहार करने पर तथा चरों में नाममात्र के परिवर्तन लाने पर थोड़े से सरलीकरण पर हमें

$$(2.2)\qquad \int_0^a t^{\nu+M-2}\psi_2(\nu+M;\ 2\mu_1+1),\ldots,2\mu_n+1;\ -a_1t,\ldots,-a_nt)\,dt,$$

$$=a^{\nu+M-1}(\nu+M-1)^{-1}\psi_2(\nu+M-1;\ 2\mu_1+1,\ldots,2\mu_n+1;\ -a_1a,\ldots,-a_na),$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(\nu+M-1)>0$ तथा $R(a)>0$.

बर्चनाल एवं चांडी [3, p. 124] ने यह दिखाया है कि

$$(2.3)\qquad \psi_2(b;c,c';x,x)={}_3F_3\left(\begin{matrix}b,\tfrac{1}{2}(c+c'),\tfrac{1}{2}(c+c'-1)\\ c,c',c+c'-1\end{matrix};4x\right);$$

अतः यदि हम (2.2) में $a_3=\ldots=a_n=0$ तथा $a_1=a_2$ रखें तो यह

$$(2.4)\qquad \int_0^a t^{\nu+\mu_1+\mu_2-2}\,{}_3F_3\left(\begin{matrix}\nu+\mu_1+\mu_2,\mu_1+\mu_2+1,\mu_1+\mu_2+\tfrac{1}{2}\\ 2\mu_1+1,\ 2\mu_2+1,\ 2\mu_1+2\mu_2-1\end{matrix};-4a_1t\right)dt$$

$$=a^{\nu+\mu_1+\mu_2-1}{}_3F_3\left(\begin{matrix}\nu+\mu_1+\mu_2-1, \mu_1+\mu_2+1, \mu_1+\mu_2+\frac{1}{2}\\ 2\mu_1+1, 2\mu_2+1, 2\mu_1+2\mu_2-1\end{matrix}; -4a_1\right),$$

में परिणत हो जाता है क्योंकि $R(\nu+\mu_1+\mu_2-1)>0$ तथा $a>0$

आगे यदि (2.2) में $a_2=\ldots=a_n=0$, तो यह एक ज्ञात परिणाम [6, p. 200] की विशिष्ट दशा में रूपान्तरित हो जाता है।

अब यदि हम

$$f(t)\equiv t^{\sigma-1}\prod_{i=1}^{n}\mathcal{J}_{\nu i}(a_i t) \text{ लें तो } [10, \text{p. } 162]$$

$$\phi(p)=2^{\sigma-2}\sqrt{(2/\pi)}\,(a_i)^{\nu_i}p^{3/2-\Sigma\nu_i-\sigma}\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\Sigma\nu_i\pm\tfrac{1}{2})\}\prod_{i=1}^{n}\{\Gamma(1+\nu_i)^{-1} \tag{2.5}$$

$$Fc\left(\tfrac{1}{2}(\sigma+\Sigma\nu_i+\tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{2}(\sigma+\Sigma\nu_i-\tfrac{1}{2}); 1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_n; -\frac{a_1^2}{p^2}, \ldots, -\frac{a_n^2}{p^2}\right)$$

जहाँ $R(\sigma\pm\frac{1}{2}+\Sigma\nu_i)>0, R(p)>\sum_{i=1}^{n}|I_m(a_i)|$, तथा $\Sigma\nu_i$ के द्वारा $\nu_1+\ldots+\nu_n$ का बोध होता है।

(1.2) का व्यवहार करने पर तथा चरों में कुछ परिवर्तन लाने पर कुछ सरलीकरण के पश्चात् हमें

$$\int_0^a t^{\sigma+\Sigma\nu_i-5/2}F_c\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\nu_i+\tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{2}(\sigma+\nu_i-\tfrac{1}{2}); 1+\nu_i, \ldots, 1+\nu_n; -a_1^2t^2, \ldots, -a_n^2t^2\}\,dt \tag{2.6}$$

$$=2a^{\sigma+\Sigma\nu_i-3/2}(\sigma+\Sigma\nu_i-\tfrac{3}{2})^{-1}\times Fc\{\tfrac{1}{2}(\sigma+\Sigma\nu_i-\tfrac{3}{2}), \tfrac{1}{2}(\sigma+\Sigma\nu_i-\tfrac{1}{2}); 1+\nu_1, \ldots, 1+\nu_n; -a_1^2a^2, \ldots, -a_n^2a^2\},$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(\sigma+\Sigma\nu_i-\frac{3}{2})>0$ तथा $a>0$.

3. इस अनुभाग में हम सरन [8, p. 84] द्वारा पारिभाषित कुछ ज्ञात समाकलों का मान ज्ञात करेंगे जिनमें तीन चरों वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन सन्निहित हैं।

निम्नांकित परिणामों की हमें आवश्यकता होगी :

सरन [9, p. 134] ने निम्नांकित क्रियात्मक युग्म दिये हैं:—

(3.1) $(t^{a_1-1}\,{}_1F_1(b_1, c_1; xt)\psi_2(b_2; c_2,c_3; yt,zt) \doteqdot \Gamma(a_1)\, p^{1-a_1}$

$$\times F_E\left(a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_2; c_1, c_2,c_3; \frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}\right),$$

क्योंकि $R(a_1)>0$ तथा $R(x+y+z+2\sqrt{yz})<R(p)$.

(3.2) $t^{a_1-1}\,{}_1F_1(b_1, c_1; xt)\Xi_2(b_2, b_3; c_2; yt,zt) \doteqdot \Gamma(a_1)\, p^{1-a_1}$

$$\times F_G\left(a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; \frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}\right),$$

क्योंकि $R(a_1)>0$ क्योंकि $R(x+y+z)<R(p)$

(3.3) $t^{a_2-1}\,{}_1F_1(b_2,c_2;yt)\,\psi_1(b_1,a_1; c_1,c_3; x, zt) \doteqdot \Gamma(a_2)p^{1-a_2}$

$$\times F_K\left(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_3; x, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}\right)$$

क्योंकि $R(a_2)>0$ तथा $R\{(1-x)(p-y)\}>R(z)$

(3.4) $t^{b_1-1}\,{}_1F_1(a_1; c_1; xt)\,\phi_1(a_2, b_2; c_2; zt, y) \doteqdot \Gamma(b_1)p^{1-b_1}$

$$\times F_M\left(a_1, a_2, a_2, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; \frac{x}{p}, y, \frac{z}{p}\right),$$

क्योंकि $R(x+z)<R(p)$ तथा $R(b_1)>0$.

(3.5) तथा $t^{b_1-1}\,{}_1F_1(a_1, c_1; xt)\Xi_1(a_2, a_3, b_2; c_3; y, zt) \doteqdot \Gamma(b_1)p^{1-b_1}$

$$\times F_N\left(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; \frac{x}{p}, y, \frac{z}{p}\right)$$

क्योंकि $R(b_1)>0$, तथा $R(x+z)<R(p)$.

यदि हम

$$f(t)=t^{a_1-1}\ {}_1F_1(b_1,c_1;\ xt)\psi_2(b_2;\ c_2,c_3;yt,\ zt)$$

को लें तो (3.1) के द्वारा हमें

$$\phi(p)=\Gamma(a_1)p^{1-a_1}F_E\left(a_1,\ a_1,\ a_1,\ b_1,b_2,\ b_2;\ c_1,\ c_2,\ c_3;\frac{x}{p},\ \frac{y}{p},\ \frac{z}{p}\right)$$

प्राप्त होगा जहाँ $R(a_1)>0$ तथा $R(x+y+z+2\sqrt{yz})<R(p)$.

(2.1) का व्यवहार करने पर तथा चरों में नाममात्र परिवर्तन करने पर थोड़े से सरलीकरण के पश्चात्

$$(3.6)\qquad \int_0^a t^{a_1-2}F_E\left(a_1,\ a_1,\ a_1,\ b_1,\ b_2,\ b_2;\ c_1,\ c_2,\ c_3;\ xt,yt,\ zt\right)dt$$

$$=a^{a_1-1}(a_1-1)^{-1}F_E(a_1-1,\ a_1-1,\ a_1-1,\ b_1,\ b_2,\ b_2;\ c_2,\ c_2,\ c_3;\ ax,ay,az),$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(a_1-1)>0,\ a>0$ तथा $R\{a(x+y+z+2\sqrt{yz})\}<1$.

निम्नांकित परिणाम (3.7), (3.8), (3.9) तथा (3.10) को इसी प्रकार से क्रमशः (3.2) (3.3), (3.4) तथा (3.5) सूत्रों से सरलता से प्राप्त किया जा सकता है

$$(3.7)\qquad \int_0^a t^{a_1-2}F_G\left(a_1,\ a_1,\ a_1,\ b_1,\ b_2,\ b_3;\ c_1,\ c_2,\ c_3;\ xt.yt,\ zt\right)dt$$

$$=a^{a_1-1}(a_1-1)^{-1}F_G(a_1-1,\ a_1-1,\ a_1-1,\ b_1,b_2,b_3;\ c_1,c_2,c_3;\ ax,\ ay,\ az)$$

क्योंकि $R(a_1-1)>0,\ a>0$ तथा $R\{a(x+y+z)\}<1$.

$$(3.8)\qquad \int_0^a t^{a_2-2}F_K\left(a_1,\ a_2,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ b_1;\ c_1,\ c_2,\ c_3;\ x,yt,\ zt\right)dt$$

$$=a^{a_2-1}(a_2-1)^{-1}F_K(a_1,\ a_2-1,\ a_2-1,\ b_1,\ b_2,\ b_1;\ c_1,\ c_2,\ c_3;\ x,\ ay,\ az),$$

क्योंकि $R(a_2-1)>0,\ a>0$ तथा $R\{(1-ax)(1-ay)\}>R(az)$.

$$(3.9)\qquad \int_0^a t^{b_1-2}F_M\left(a_1,\ a_2,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ b_1;\ c_1,\ c_2,\ c_2;\ xt,y,\ zt\right)dt$$

$$=a^{b_1-1}(b_1-1)^{-1}F_M(a_1, a_2, a_2, b_1-1, b_2, b_1-1; c_1, c_2, c_2; ax, y, az)$$

क्योंकि $R(b_1-1)>0$, $a>0$ तथा $R\{a(x+z)\}<1$.

$$(3.10) \qquad \int_0^a t^{b_1-2}F_N\Big(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_1; c_1, c_2, c_2; xt, y, zt\Big)\,dt$$

$$=a^{b_1-1}(b_1-1)^{-1}F_N(a_1, a_2, a_3, b_1-1, b_2, b_1-1; c_1, c_2, c_2; ax, y, az),$$

क्योंकि $R(b_1-1)>0$, $a>0$, $R\{a(x+z)\}<1$.

आगे यदि $x\to 0$, F_G, F_1 में F_k, F_2 में F_N, F_3 में तथा F_E, F_4, में अस्त हो जहाँ F_1, F_2, F_3 तथा F_4 एपेल फलन हों तो इसके परिणामस्वरूप (3.6), (3.7), (3.8) तथा (3.10) से क्रमशः (3.11), (3.12), (3.13) तथा (3.14) परिणामों की प्राप्ति होगी।

$$(3.11) \qquad \int_0^a {}^{a_1-2}F_4\Big(a_1, b_2; c_2, c_3; yt, zt\Big)\,dt$$

$$=a^{a_1-1}(a_1-1)^{-1}F_4(a_1-1, b_2; c_2, c_3; ay, az),$$

क्योंकि $R(a_1-1)>0$, $a>0$ तथा $R\{a(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\}<1$.

$$(3.12) \qquad \int_0^a t^{a_1-2}F_1\Big(a_1, b_2, b_3; c_2; yt, zt\Big)\,dt$$

$$=a^{a_1-1}(a_1-1)^{-1}F_1(a_1-1, b_2, b_3 : c_2; ay, az),$$

क्योंकि $R(a_1-1)>0$, $a>0$ तथा $R\{a(y+z)\}<1$,

$$(3.13) \qquad \int_0^a t^{a_2-2}F_2\Big(a_2, b_2, b_1; c_2, c_3; yt, zt\Big)\,dt$$

$$=a^{a_2-1}(a_2-1)^{-1}F_2(a_2-1, b_2, b_1; c_2, c_3; ay, az),$$

क्योंकि $R(a_2-1)>0$, $a>0$ तथा $|ay|+|az|<1$.

$$(3.14) \qquad \int_0^a t^{b_1-2}F_3\Big(a_2, a_3, b_1, b_2; c_2; y, zt\Big)\,dt$$

$$=a^{b_1-1}(b_1-1)^{-1}F_3(a_2, a_3, b_1-1, b_2; c_2; y, az),$$

क्योंकि $R(b_1-1)>0, a>0$ तथा $|az|<1$.

बर्चनाल [2, p. 101, समीकरण 37] ने निम्नांकित परिणाम सिद्ध किया है

$$(3.15) \qquad F_4\Big(\alpha, \beta; \gamma, \delta; x, x\Big) = {}_4F_3\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \frac{1}{2}(\gamma+\delta-1), \frac{1}{2}(\gamma+\delta) \\ \gamma, \delta, \gamma+\delta-1;\end{pmatrix}; 4x\Big)$$

क्योंकि $|x|<\frac{1}{4}$.

अतः यदि हम (3.11) में $y=z$ रखें तो हमें

$$(3.16) \qquad \int_0^a t^{a_1-2}\,{}_4F_3\begin{pmatrix}a_1, b_2, \frac{1}{2}(c_2+c_3-1), \frac{1}{2}(c_2+c_3) \\ c_2, c_3, c_2+c_3-1\end{pmatrix}; 4yt\Big)\,dt$$

$$= a^{a_1-1}(a_1-1)^{-1}{}_4F_3\begin{pmatrix}a_1-1, b_2, \frac{1}{2}(c_2+c_3-1), \frac{1}{2}(c_2+c_3) \\ c_2, c_3, c_2+c_3-1\end{pmatrix}; 4ay\Big\},$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(a_1-1)>0, a>0$ तथा $R|ay|<\frac{1}{4}$.

प्राचलों को उपर्युक्त मान प्रदान करने पर एपेल के हाइपरज्यामितीय फलनों F_1, F_2, F_3, तथा F_4 को गास हाइपरज्यामीतीय फलन ${}_2F_1$[4, p. 238] में बदला जा सकता है अतः (3.11), (3.12), (3.13) तथा (3.14) परिणामों से ज्ञात परिणाम [6, p. 200] की प्राप्ति होगी।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० पी० एन० राठी का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में अपने सुझाव दिये।

निर्देश

1. एपेल, पी०, काम्पे द फेरी, जे०। Functions hypergeometriques et hyperspheriques—Polynomes d' Hermite Gauthier-Villars, पेरिस, 1926.

2. बर्चनाल, जे० एल०। क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड), 1942, **13**, 90-106.

3. बर्चनाल, जे० एल० तथा चांडी, टी० डब्लू०। क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड) 1941, **12**, 112-128.

4. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य। Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.

5. वही। Tables of Integral Transforms, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1950.

6. वही। Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

7. मक्लाच्लैन, एन० डब्लू०। Modern Operational Calculus, डोवर, न्यूयार्क 1950.

8. सरन, एस०। गणित, 1954, **5**, 83-90.

9. वही। Rivista di Mathematica, Parma, 1957, **8**, 133-143.

10. सक्सेना, आर० के०। Monatshefte fur Mathematik, 1966, **70**, 161-163.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 107-111

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 107-111

सार्वत्रीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल सम्बन्धी समाकल

आर० के० सक्सेना तथा एस० एन० माथुर

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जनवरी 2, 1967]

सारांश

इस शोध निबन्ध में हमने कुछ समाकलों का मान ज्ञात किया है जिनमें सार्वत्रीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल काम्पे द फेरी द्वारा प्रचारित दो चरों के हाइपरज्यामितीय फलन के रूप में सन्निहित हैं।

Abstract

Integrals involving products of generalized Hypergeometric functions. *By* R. K. Saxena and S. N. Mathur, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In this paper we evaluate some integrals involving products of generalized Hypergeometric functions in terms of Hypergeometric function of two variables introduced by Kampé de Fériet.

आगे हम सर्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन ${}_pF_q(z)$ के लिये संकुचित संकेत का प्रयोग करेंगे और

$$ {}_pF_q(z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((a))_n\, z^n}{((b))\, n!}. $$

$$ {}_PF_Q(z) = {}_PF_Q\left(\begin{matrix} A_I \\ B_J \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((A))_n\, z^n}{((B))_n\, n!} $$

लिखेंगे जहाँ i, 1 से लेकर p तक, I, 1 से लेकर P तक तथा आगे भी इसी प्रकार होंगे। इस प्रकार $((a))_n$ को $\pi(a_1)_n$ रूप में माना जावेगा तथा ऐसी ही विवेचना $((A))_n$, इत्यादि के लिये होगी जिसमें

$$ (a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \quad \text{तथा} \quad (a)_0 = 1. $$

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के गुणनफल सम्बन्धी कतिपय समाकलों का मान काम्पे द फेरी द्वारा (1, p. 150) प्रचारित उच्चकोटि के दो चरों वाले हाइपर-ज्यामितीय फलन के रूप में ज्ञात करना है।

प्रथम समाकल. यहाँ पर जिस सूत्र को सिद्ध करना है वह है

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-1/2x} W_{k,m}(x)\, {}_pF_q\left(\begin{matrix} \\ b_j\end{matrix}\Big| ax\right)\, {}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\ B_J\end{matrix}\Big| bx\right) dx$$

$$= \frac{\Gamma(1/2+\lambda+m)\Gamma(1/2+\lambda-m)}{\Gamma(1+\lambda-k)}$$

$$\times \left]\begin{matrix}\frac{1}{2}+\lambda+m,\ \frac{1}{2}+\lambda-m:a_i;\ A_I; \\ 1+\lambda-k:b_j;\ B_J;\end{matrix}\quad a,\ b\right] \qquad 1.1$$

जहाँ $W_{k,m}(z)$ व्हिट्टेकर फलन को प्रदर्शित करता है, $R_e(\lambda\pm m)>-\frac{1}{2}, p\leqslant q$ तथा $P\leqslant Q$. यहाँ F काम्पे द फेरी [1, p. 150] द्वारा दिये गये हाइपरज्यामितीय फलन के दो चरों को अंकित करता है और इस फलन का आधुनिक संकेत बर्चनाल तथा चांडी [4, p. 112) द्वारा दिया हुआ है।

उपपत्ति : यदि हम (1.1) में ${}_PF_Q(bx)$ का मान इसके समतुल्य कोटि श्रेणी के रूप में रखें, समाकलन तथा संकलन के क्रम को उलट दें जैसा कि कथित परिणाम के द्वारा सम्भव है और निम्नांकित सूत्र का व्यवहार करें

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x/2} W_{k,m}(x)\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_i\end{matrix}\Big| ax\right) dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-m)}{\Gamma(1+\lambda-k)}$$

$$\times\, {}_{p+2}F_{q+1}\left(\begin{matrix}\lambda\pm m+\frac{1}{2},\ a_i\\ 1+\lambda-k, b_j\end{matrix}\Big| a\right), \qquad (1.2)$$

जहाँ $R_e(\lambda\pm m)>-\frac{1}{2}$, $p<q$, जो माइजर के सूत्र [7, p. 422] से प्राप्त होता है तो हमें अभीप्स परिणाम प्राप्त होगा।

जब $k=0$, $m=\frac{1}{2}$ तो समानता (identity)

$$W_{1/2,0}(x)\equiv e^{-x/2}, \qquad (1.3)$$

के बल पर (1.1) सुगमता से

$$x^{\lambda-1}\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\Big| ax\right) {}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\ B_J\end{matrix}\Big| bx\right).$$

गणनफल को लैपलास परिवर्त प्रदान करता है।

2. **द्वितीय समाकल.** इसी प्रकार की क्रियाविधि का अनुसरण करने पर तथा [6, p. 337 समीकरण 12] सूत्र का प्रयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} K_\nu(2x^{1/2})\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle|ax\right){}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle|bx\right)dx$$

$$=\tfrac{1}{2}\Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2}\nu)\,\Gamma(\lambda-\tfrac{1}{2}\nu)\times F\left[\begin{matrix}\lambda+\frac{1}{2}\nu,\ \lambda-\frac{1}{2}\nu : a_i; A_I;\\ - \qquad : b_j; B_J;\end{matrix}\ a,\ b\right], \tag{2.1}$$

प्राप्त होगा जहाँ $R_e\lambda > \frac{1}{2}|R_e\nu|, p \leqslant q-1, P \leqslant Q-1$ तथा $K_\nu(z)$ दूसरे प्रकार के संशोधित बेसेल फलन को प्रदर्शित करते हैं।

(2.1) की विशिष्ट दशा के रूप में यदि हम $p=P=0,\ q=Q=1$ रखें तथा परिणाम

$$(\tfrac{1}{2}z)^\nu\, {}_0F_1\left(\nu+1\ ;\ -\frac{z^2}{4}\right)=\Gamma(\nu+1)\, J_\nu(z), \tag{2.2}$$

का व्यवहार करें तो हमें बैली का सूत्र [3, p. 38] प्राप्त होता है।

अन्य रोचक परिणाम गुणनफल

$$x^{\lambda-1}\ {}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle|ax^2\right){}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle|bx^2\right)$$

का लैपलास परिवर्त है जो 2.1) से व्युत्पन्न किया जा सकता है यदि $v=\pm\frac{1}{2}$ तथा ज्ञात सूत्र

$$K_{\pm 1/2}(x)\equiv\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2}e^{-x}$$

का व्यवहार किया जाय।

3. **तृतीय तथा चतुर्थ समाकल.** अन्त में हम निम्नलिखित दो परिणामों को अंकित करेंगे जो सूत्र [6, अनुभाग 6·9(10)] द्वारा इसी विधि से सिद्ध किये जा सकते हैं।

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle|ax\right){}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\B_J\end{matrix}\middle|bx\right)dx$$

$$=B(\lambda,\mu)\ F\left[\begin{matrix}\lambda & : a_i\,; A_I\,;\\ \lambda+\mu & : b_j\,; B_J\,;\end{matrix}\ a,\ b\right], \tag{3.1}$$

जहाँ $R_e\lambda>0,\ R_e\mu>0,\ p\lesseqgtr q+1$ तथा $P\leqslant Q+1$.

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i\\b_j\end{matrix}\middle|ax\right){}_PF_Q\left(\begin{matrix}A_I\\A_J\end{matrix}\middle|b(1-x)\right)dx$$

$$=B(\lambda,\mu)F\left[\begin{matrix}-&:\lambda,a_i;A_I,\mu;\\ \lambda+\mu:&b_j;B_J\quad;\end{matrix}a,b\right], \tag{3.2}$$

जहाँ $R_e\lambda>0,\ R_e\mu>0,\ p\leqslant q,\ P\leqslant Q$

यदि $p=P=0,\ q=Q=1,\ b_1=1+\gamma, B_1=1+\delta$

तो (2.2), (3.1) तथा (3.2) के बल पर क्रमश: (3.3) तथा (3.4) के रोचक परिणाम प्राप्त होंगे

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}J_\gamma(ax^{1/2})\,J_\delta(bx^{1/2})\,dx=\frac{a^\gamma b^\delta B(\lambda+\gamma/2+\delta/2,\mu)}{\Gamma(1+\gamma)\,\Gamma(1+\delta)2^{\gamma+\delta}}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}\lambda+\gamma/2+\delta/2; & -; & -;\\ \lambda+\gamma/2+\delta/2+u; & 1+\gamma; & 1+\delta;\end{matrix}-\frac{a^2}{4},-\frac{b^2}{4}\right], \tag{3.3}$$

जहाँ $R_e(\lambda+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2}\delta)>0,\ R_e(\mu)>0.$

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{u-1}J_\gamma(ax^{1/2})\,J_\delta\{b(1-x)^{1/2}\}dx=\frac{a^\gamma b^\delta B(\lambda+\gamma/2,u+\delta/2)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(1+\delta)2^{\gamma+\delta}}$$

$$\times F\left[\begin{matrix}-:\lambda+\gamma/2, & -; & -;\\ \lambda+u+\gamma/2+\delta/2; & 1+\gamma, & 1+\delta;\end{matrix}\frac{-a_2}{4},\frac{-b^2}{4}\right], \tag{3.4}$$

जहाँ $R_e(\lambda+\gamma/2)>0,\ R_e(u+\delta/2)>0.$

बैली [2, p. 202] द्वारा (3.4) की प्राप्ति एक भिन्न रूप में की गई।

अन्त में यह सूचित किया जाता है कि इस शोध पत्र के मुख्य परिणामों से बेसिल फलन, व्हिटेकर फलन, लेगेण्ड्र फलन के गुणनफलों से सम्बन्धित कई नवीन रोचक समाकल व्युत्पन्न किये जा सकते हैं जिसके लिये उपर्युक्त प्राचलों का चुनाव एवं सार्वत्रीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों की विशिष्ट दशाओं के परिणाम का उपयोग करना होगा। उदाहरणार्थ (1.1) में सूत्र 5, अनुभाग 7·2.8 (49) का प्रयोग करने से समाकल

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x/2}\,W_{k,m}(x)\,J_\mu(ax)\,J_\nu(ax)\,J_\gamma(bx)\,J_\delta(bx)\,dx.$$

के मान का एक व्यंजक प्राप्त हो सकता है।

निर्देश

1. एपेल, पी० तथा काम्पे, द फेरी, जे० । Fonctions hypergéometriques et hypersheriques : Polynomes d' Hermite. Gauthier villars, **पेरिस,** 1926.
2. बेली, डब्लू० एन० । **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०,** 1930, **31,** 200-208.
3. वही । **वही,** 1936, **40,** 37-48.
4. बर्चनाल, जे० एल० तथा चांडी, टी० डब्लू० । **क्वार्ट जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)** 1941, **12,** 112-128.
5. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Higher Transcendental Functions, भाग II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1953.
6. वही । Tables of Integral Transforms, भाग I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1954.
7. वही । Tables of Integral Transforms, भाग II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1954.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 113-120

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 113-120

लेगेण्ड्र फलनों से सम्बन्धित अनन्त समाकल

एच० बी० मल्लू

गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—मार्च 3, 1967]

सारांश

इस टिप्पणी में लेगेण्ड्र फलनों से सम्बन्धित कतिपय अनन्त समाकलों का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

Infinite integrals involving Legendre functions. *By* H. B. Malloo, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur (Rajasthan).

In this note a few infinite integrals involving Legendre functions have been evaluated.

1. क्रियात्मक कलन की विधियों का प्रयोग करते हुये हम लैपलास परिवर्त

$$\psi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt \tag{1}$$

को $\psi(p)\doteqdot f(t)$ द्वारा तथा माइजर परिवर्त

$$\phi(p)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}\,p\int_0^\infty (pt)^{1/2}K_\nu(pt)\,f(t)\,dt \tag{2}$$

को $\phi(p)\underset{\nu}{\overset{k}{=}}$ द्वारा व्यक्त करेंगे। यदि $v=\pm\frac{1}{2}$ तो (2) स्वयमेव (1) में परिणत हो जावेगा।

2. **प्रमेय.** यदि $\psi(p)\doteqdot f(t)$

तथा $\phi(p)\underset{\nu}{\overset{k}{=}} t^{-1/2}e^{\beta t}k_\nu(\beta t)\,f(t),$

$$\text{तो}\ \phi(p)=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)}\, p\int_0^\infty (p+t)^{-1} P_{\nu-1/2}\left\{\frac{(t+2p)(t+2\beta)}{2p\beta}-1\right\}\psi(p+t)\,dt \quad (3)$$

यदि समाकल अभिसारी हो।

उपपत्ति

चूँकि $\psi(p)\doteqdot f(t)$,

$$e^{-\alpha t} f(t)\doteqdot\frac{p\psi(p+\alpha)}{p+\alpha},\ R(p+\alpha)>0, \quad (4)$$

1, d 212(6)] से भी हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$(4\alpha\beta)^{-1/2} P_{\nu-1/2}\left[\frac{(t+2\alpha)(t+2\beta)}{2\alpha\beta}-1\right]\doteqdot\pi^{-1} p e^{(\alpha+\beta)p} k_\nu(\alpha p)\, k_\nu(\beta p). \quad (5)$$

पार्सेवाल-गोल्डस्टीन सूत्र में (4) तथा (5) का उपयोग करने पर

यदि $\psi(p)\doteqdot g(t)$ तथा $\phi(p)\doteqdot h(t)$,

$$\text{तो}\quad \int_0^\infty \phi(t)\, g(t) t^{-1}\, dt=\int_0^\infty \psi(t)\, h(t)\, t^{-1}\, dt, \quad (6)$$

हम निम्नांकित प्राप्त करेंगे

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha\int_0^\infty (\alpha t)^{1/2} k_\nu(\alpha t)\, t^{-1/2} e^{\beta t} k_\nu(\beta t) f(t)\, dt$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\,\alpha\int_0^\infty (\alpha+t)^{-1} P_{\nu-1/2}\left[\frac{(t+2\alpha)(t+2\beta)}{2\alpha\beta}-1\right]\psi(\alpha+t)\, dt.$$

यदि α को p द्वारा प्रतिस्थापित कर दें तो प्रमेय प्राप्त होगा।

3. उदाहरण

(*i*) [1, p. 182(9)] से प्रारम्भ करके

$$f(t)=e^{-\beta t} t^\rho J_\mu(\alpha t)$$

$$\doteqdot\Gamma(\mu+\rho+1)\, p\{(p+\beta)^2+\alpha^2\}^{-1/2(\rho+1)} P_\rho^{-\mu}\left[\frac{p+\beta}{\sqrt{\{(p+\beta)^2+\alpha^2\}}}\right]$$

$$=\psi(p),\ R(\mu+\rho+1)>0,\ R(p+\beta)>|I_m\,\alpha|,$$

हमें [5, p. 110(13)] प्राप्त होगा :

$$t^{-1/2}\,e^{\beta t}\,k_\nu(\beta t)\,f(t)=t^{\rho-1/2}\mathcal{J}_\mu(\alpha t)\,k_\nu(\beta t)$$

$$\frac{k}{\nu}\,\frac{2^{\rho-3/2}\,\alpha^\mu\,p^{1/2-\mu-\rho}\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\rho+\mu+1)\}}{\sqrt{(\pi)}\,\Gamma(1+\mu)}\sum_{\nu,-\nu}p^{-\nu}\beta^\nu\Gamma(-\nu)\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1)\}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+1),\ \tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1);\ 1+\mu,\ 1+\nu;\ -\frac{\alpha^2}{p^2},\ \frac{\beta^2}{p^2}\right]$$

$$=\phi(p),\ R(\rho+\mu\pm2\nu+1)>0,\ R(p+\beta)>|I_m\,\alpha|.$$

तो प्रमेय से

$$\int_0^\infty\left\{(t+p+\beta)^2+\alpha^2\right\}^{-(\rho+1)/2}P_\rho^{-\mu}\left[\frac{t+p+\beta}{\sqrt{\{(t+p+\beta)^2+\alpha^2\}}}\right]$$

$$\times P_{\nu-1/2}\left[\frac{(t+2p)(t+2\beta)}{2p\beta}-1\right]dt$$

$$=\frac{\pi^{-1/2}\,2^{-\mu-1}\,p^{-1/2-\mu-\rho}\,\alpha^\mu\,\beta^{1/2}}{\Gamma(1+\mu)\,\Gamma\{\frac{1}{2}(\rho+\mu+2)\}}\sum_{\nu,-\nu}\beta^\nu\,p^{-\nu}\,\Gamma(-\nu)\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1)\}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+1),\ \tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1);\ 1+\mu,\ 1+\nu;-\frac{\alpha^2}{p^2},\ \frac{\beta^2}{p^2}\right],\tag{7}$$

प्राप्त होगा जहाँ $R(\rho+\mu\pm2\nu+1)>0,\ R(p+\beta)>|I_m\alpha|$.

यदि हम $\alpha\to0$ करें तथा यह स्मरण रखते हुये कि

$$\sum_{\nu_1,-\nu}\Gamma(-\nu)\,\Gamma(a+\nu)\,x^{\nu/2}\,{}_2F_1(a,\ a+\nu;\ 1+\nu;\ x)$$

$$=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\nu)\,\Gamma(a-\nu)}{\Gamma(2a)}x^{\nu/2-a}\,{}_2F_1\left(a,\ a-\nu;\ 2a;\ 1-\frac{1}{x}\right)\tag{8}$$

तथा क्योंकि $z \to 1$,

$$P_{\rho}^{-\mu}(z) \sim \frac{2^{-\mu/2}}{\Gamma(1+\mu)}(1-\mu)^{\mu/2}, \tag{9}$$

हम देखते हैं कि

$$\int_0^\infty (t+p+\beta)^{-2a} P_{\nu-1/2}\left\{\frac{(t+2p)(t+2\beta)}{2p\beta}-1\right\} dt$$

$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+\nu)\Gamma(a-\nu)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2a)\Gamma(a+\frac{1}{2})} p^{1/2-\nu}\beta^{1/2+\nu-2a}\,{}_2F_1\left(a, a-\nu; 2a; 1-\frac{p^2}{\beta^2}\right),$$

$$R(a\pm\nu)>0,\ R(p+\beta)>0. \tag{10}$$

(*ii*) [1, p. 198(27)] को लेने पर

$$f(t)=e^{-\beta t}t^{\rho}k_{\mu}(at)$$

$$\doteqdot\sqrt{\left(\frac{\pi}{2a}\right)}\Gamma(\rho+\mu+1)\,\Gamma(\rho-\mu+1)\,p\{(p+\beta)^2-a^2\}^{-(\rho+1/2)1/2}$$

$$P_{\mu-1/2}^{-\rho-1/2}\left(\frac{p+\beta}{a}\right)$$

$$=\psi(p),\ R(\rho\pm\mu+1)>0,\ R(p+\beta+a)>0,$$

हमें [5, p, 111(17)] प्राप्त होगा

$$t^{-1/2}e^{\beta t}k_{\nu}(\beta t)f(t)=t^{\rho-1/2}k_{\mu}(at)\,k_{\nu}(\beta t)$$

$$\frac{k}{\overline{\overline{\nu}}}\frac{2^{\rho-5/2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{\mu,-\mu}\sum_{\nu,-\nu}\frac{a^{\mu}\beta^{\nu}\Gamma(-\mu)\Gamma(-\nu)\Gamma\{\frac{1}{2}(\rho+\mu+1)\}\Gamma\{\frac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1)\}}{p^{\rho+\mu+\nu-1/2}}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+1),\ \tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1);\ 1+\mu,\ 1+\nu;\frac{a^2}{p^2},\ \frac{\beta^2}{p^2}\right]$$

$$=\phi(p),\ R(\rho\pm2\nu\pm\mu+1)>0,\ R(a+\beta+p)>0.$$

इस प्रमेय के व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty \left\{(t+p+\beta)^2-a^2\right\}^{-(\rho+1/2)/2} P_{\mu-1/2}^{-\rho-1/2}\left(\frac{t+p+\beta}{a}\right)$$

$$\times P_{\nu-1/2}\left[\frac{(t+2p)(t+2\beta)}{2p\beta}-1\right]dt$$

$$=\frac{2^{\rho-3/2}\,p^{-\rho-1/2}}{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+\mu+1)\,\Gamma(\rho-\mu+1)}\sum_{\mu,-\mu}\sum_{\nu,-\nu} a^{\mu+1/2}\beta^{\nu+1/2}p^{-\mu-\nu}\,\Gamma(-\mu)\,\Gamma(-\nu)$$

$$\times\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+1)\}\{\Gamma\{\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1)\}\}$$

$$F_4\left[\tfrac{1}{2}(\rho+\mu+1),\ \tfrac{1}{2}(\rho+\mu+2\nu+1);\ 1+\mu,\ 1+\nu;\frac{a^2}{p^2},\frac{\beta^2}{p^2}\right],$$

$$R(\rho\pm\mu\pm2\nu+1)>0,\ R(a+p+\beta)>0.$$

(*iii*) अब हम [1, p. 238(10)] लेंगे

$$f(t)=e^{-\beta t}\,t^{2\lambda+2\mu-1}\,{}_1F_2(\mu+\tfrac{1}{2};\lambda+\mu,\ 2\mu+1;-\gamma^2t^2)$$

$$\doteq\Gamma(2\lambda+2\mu)\,p^{1-2\lambda-2\mu}\,{}_2F_1\left(\mu+\tfrac{1}{2},\ \lambda+\mu+\tfrac{1}{2};\ 2\mu+1-\frac{4\gamma^2}{p^2}\right)$$

$$=\psi(p),\ R(\lambda+\mu)>0,\ R(p)>2|I_m\gamma|.$$

तो [3, p. 132(12)] से हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$t^{-1/2}e^{\beta t}k_\nu(\beta t)f(t)=t^{2\lambda+2\mu-3/2}\,k_\nu(\beta t)\,{}_1F_2(\mu+\tfrac{1}{2};\lambda+\mu,2\mu+1;-\gamma^2t^2)$$

$$\frac{k}{\nu}\ \frac{2^{2\lambda+2\mu-5/2}}{\sqrt{\pi}}\,p^{3/2}\,\Gamma(\lambda+\mu)\sum_{\nu,-\nu}\frac{(p\beta)^\nu\,\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{(p^2+\beta^2+2\gamma^2)^{\lambda+\mu+\nu}}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu),\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+1);\nu+1,\ \mu+1;\right.$$

$$\left.\frac{4p^2\beta^2}{(p^2+\beta^2+2\gamma^2)^2},\ \frac{4\gamma^4}{(p^2+\beta^2+2\gamma^2)^2}\right],$$

$$R(\lambda+\mu\pm\nu)>0,\ R(p+\beta)>2|I_m a|.$$

प्रमेय के व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty (t+p+\beta)^{-2\mu-2\lambda} P_{\nu-1/2}\left\{\frac{(t+2p)(t+2\beta)}{2p\beta}\right\}\ {}_2F_1\left\{\mu+\tfrac{1}{2}, \lambda+\mu+\tfrac{1}{2}; 2\mu+1; -\frac{4\gamma^2}{(t+p+\beta)^2}\right\} dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{(\pi)}\,\Gamma(\lambda+\mu+\frac{1}{2})}\sum_{\nu,-\nu} \frac{(p\beta)^{\nu+1/2}\,\Gamma(-\nu)\,\Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{(p^2+\beta^2+2\gamma^2)^{\lambda+\mu+\nu}}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu), \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+1); \nu+1, \mu+1; \frac{4p^2\beta^2}{(p^2+\beta^2+2\gamma^2)^2}, \frac{4\gamma^4}{(p^2+\beta^2+2\gamma^2)^2}\right], \tag{12}$$

$$R(\lambda+\mu\pm\nu)>0,\ R(p+\beta)>2|I_m \gamma|.$$

(*iv*) [2, p. 168(9)] से यह सिद्ध होता है कि

$$f(t)=e^{-\beta t}t^{2\lambda-1}S_2\{\tfrac{1}{2}(\mu-1), -\tfrac{1}{2}(\mu+1), \tfrac{1}{2}(1-\lambda), -\tfrac{1}{2}\lambda; \tfrac{1}{4}a^2t^2\}$$

$$\doteqdot\frac{2^{3\lambda+3\mu-1}\,p(p+\beta)\,a^{2\mu}\,\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}{\sqrt{(\pi)}\Gamma(\lambda+1)\{(p+\beta)^2+4a^2\}^{\lambda+\mu+1/2}}$$

$$\times {}_2F_1\left\{\tfrac{1}{2}+\lambda+\mu, \tfrac{1}{2}+\mu; 1+\lambda; \frac{(p+\beta)^2-4a^2}{(p+\beta)^2+4a^2}\right\}$$

$$=\psi(p),\ R(\tfrac{1}{2}+\lambda\pm\mu)>0,\ R(p+\beta)>0,\ a>0.$$

तथा [4, p. 175(6)] से एवं

$$K_\nu(z)=\tfrac{1}{2}\sum_{\nu,-\nu}\Gamma(-\nu)\,\Gamma(1-\nu)\,I_\nu(z)$$

सम्बन्ध से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

$t^{-1/2} e^{\beta t} K_\nu(\beta t) f(t)$

$$=t^{2\lambda-3/2} K_\nu(\beta t)\, S_2\{\tfrac{1}{2}(\mu-1), -\tfrac{1}{2}(\mu+1), \tfrac{1}{2}(1-\lambda), -\tfrac{1}{2}\lambda; \tfrac{1}{4}a^2t^2\}$$

$$\overset{k}{\underset{\nu}{=}} \sum_{\mu, -\mu} \sum_{\nu, -\nu} \frac{2^{3\lambda+\mu-7/2} a^{2\mu} \beta^\nu p^{\nu+3/2} \Gamma(-\mu)\, \Gamma(-\nu)\, \Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{\pi(p^2+\beta^2)^{\lambda+\mu+\nu}}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu), \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+1); \mu+1, \nu+1; \frac{4^2a^4}{(p^2+\beta^2)^2}, \frac{4p^2\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}\right]$$

$$=\phi(p),\ R(\lambda+\mu+\nu)>0,\ R(p+\beta)>0,\ a>0.$$

प्रमेय के व्यवहार करने पर

$$\int_0^\infty (t+p+\beta)\{(t+p+\beta)^2+4a^2\}^{-\lambda-\mu-1/2}\, {}_2F_1\left\{\tfrac{1}{2}+\lambda+\mu, \tfrac{1}{2}+\mu;\ 1+\lambda; \frac{(t+p+\beta)^2-4a^2}{(t+p+\beta)^2+4a^2}\right\}$$

$$\times P_{\nu-1/2}\left[\frac{(t+2p)(t+2\beta)}{2p\beta}-1\right]dt$$

$$=\frac{2^{-3\mu-2} a^{-2\mu}\, \Gamma(\lambda+1)}{\pi \Gamma(\tfrac{1}{2}+\lambda+\mu)\, \Gamma(\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu)}$$

$$\sum_{\mu, -\mu} \sum_{\nu, -\nu} \frac{2^\mu a^{2\mu} (p\beta)^{\nu+1/2} \Gamma(-\mu) \Gamma(-\nu) \Gamma(\lambda+\mu+\nu)}{(p^2+\beta^2)^{\lambda+\mu+\nu}}$$

$$\times F_4\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu), \tfrac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+1); 1+\mu, 1+\nu; \frac{4a^4}{(p^2+\beta^2)^2}, \frac{4p^2\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}\right],$$

$$R(\lambda+\mu\pm\nu)>0,\ R(-2\mu)>0,\ R(p+\beta)>0,\ a>0. \qquad (14)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० सी० बी० राठी द्वारा प्रदर्शित रुचि एवं सहायता के लिये उनका आभारी है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य। Tables of Integral Transforms, भाग I, मैक-ग्राहिल, 1954.
2. सक्सेना, आर० के०। प्रोसी० नेश० इंस्टी० सांइस, इंडिया, 1959, **25,** 166-70.
3. वही। प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०, 1964, **6,** 130-32.
4. वही। प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०, 1964, **60,** 174-76.
5. शर्मा, के० सी०। प्रोसी० ग्लास्गो मैथ० एसो०, 1963, **6,** 107-112.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 121-126

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 121-126

सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त के सम्बन्ध में

के० एन० मेहरा तथा आर० के० सक्सेना,
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—फरवरी 13, 1967]

सारांश

सक्सेना द्वारा प्राप्त लैपलास परिवर्त तथा सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त को पुनः प्रयोग करते हुये प्रस्तुत प्रपत्र में स्टाइल्जे परिवर्त का सार्वीकरण दिया जा रहा है'

Abstract

On a generalized Stieltjes transform. *By* K. N. Mehra and R. K. Saxena, Department of Mathematics, Jodhpur University, Jodhpur.

In this paper a generalization of the Stieltjes transform by taking the iteration of the Laplace transform and generalized Stieltjes transform introduced earlier by Saxena has been given.

1. विषय प्रवेश. एक नवीन शोधपत्र में सक्सेना[6] ने निम्नांकित समाकलीय समीकरण द्वारा अभिव्यक्त समाकल परिवर्त का प्रतीप सूत्र प्राप्त किया है ।

$$\phi(x)=\int_0^\infty R_{p,q,r}(xu)\, h(u)\, du, \tag{1}$$

जहाँ $R_{p,q,r}(x)$ का मेलिन–बार्न्स समाकल निरूण

$$R_{p,q,r}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \chi(s)\, x^{-s}\, ds, \tag{2}$$

है जहाँ,

$$\chi(s)=\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\frac{a_j+s}{p}\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{b_j+s}{m_j}\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{1+d_j-s}{n_j}\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\frac{c_j+s}{m_j}\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(\frac{1+e_j-s}{n_j}\right)}$$

$h \epsilon L(0, \infty)$, $m_j, n_j > 0$ यदि $j=1,2,\ldots,q$; $q,r=1,2,\ldots$; $p=1,2,\ldots$

$x<0$ तथा (2) में समाकल के सभी ध्रुव सामान्य हैं। c कन्टूर एक सरल रेखा है जो s-तल में कल्पित अक्ष के समान्तर है और $s=c+it$, $-\infty<t<\infty$ द्वारा व्यक्त की जाती है जिसमें t वास्तविक है और ऐसी है कि $\Gamma\left(\frac{a_j+s}{p}\right)$ के सभी ध्रुव $j=1,2,\ldots p$ के लिये तथा $\Gamma\left(\frac{b_j+s}{m_j}\right)$ के $j=1,2,\ldots q$ के लिये बाईं ओर रहते हैं और $\Gamma\left(\frac{1+d_j-s}{n_j}\right)$ के सभी ध्रुव $j=1,2,\ldots,r$ के लिये कन्टूर के दाहिनी ओर रहते हैं। यह रोचक है कि (1) का रूप

$$\phi(x)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_i)}{\Gamma(b_i)}\right\}\int_0^\infty (xu)^\lambda {}_kF_k(a_1,\ldots,a_k;b_1,\ldots,b_k;-xu)\times h(\mu)\,du, \quad (3)$$

हो जाता है जहाँ $h\epsilon L(O, \infty)$, $R(\lambda)\geqslant 0$, $R(\lambda+max\ ak)<-1$, $b_k\neq 0,-1,-2,\ldots$, यदि $p=1$, $q=0$, $r=k$, $n_j=1$, $d_j=a_j-\lambda-1$, $e_j=b_j-\lambda-1$

यदि $j=1,2,\ldots,k$ तथा $a_1=\lambda$, समाकल [5, p. 102] के अनुसार

$$\int_L \Gamma(\lambda+s)\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(a_i-\lambda-s)}{\Gamma(b_i-\lambda-s)}x^{-s}\,ds=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_i)}{\Gamma(b_i)}\right\}$$

$$\times {}_kF_k(a_1,\ldots,a_k;\ b_1,\ldots,b_k;\ -x),$$

जहाँ ${}_kF_k(x)$ सामान्य सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन [5, p. 72] है।

यदि $k=1$ तो (4) जोशी [3, 4] द्वारा अध्ययन किये जाने वाले फलन

$$\phi(x)=\frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(b_1)}\int_0^\infty (xu)^\lambda {}_1F_1(a_1;\ b_1;\ -xu)h(u)\,du$$

में परिणत हो जाता है जहाँ $R(\lambda)\geqslant 0$, $b_1\neq 0,-1,-2,\ldots$; तथा $h\epsilon L(0, \infty)$.

इस टिप्पणी का उद्देश्य स्टाइल्जे परिवर्त का सार्वत्रीकरण (3) द्वारा पारिभाषित लैपलास परिवर्त तथा सार्वीकृत लैपलास परिवर्त की पुनरावृत्ति द्वारा प्रस्तुत करना है और इसके लिये प्रतीपन समीकरण भी निकालना है।

२. **प्रमेय 1.** यदि $$\psi(x)=\int_0^\infty e^{-ux}\phi(u)\,du \quad (6)$$

जहाँ

$$\phi(x)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_i)}{\Gamma(b_i)}\right\}\int_0^\infty (xu)^\lambda\ {}_kF_k(a_1,\ldots,a_k;\,b_1,\ldots,b_k;\,-xu)\,h(u)\,du \quad (7)$$

तो

$$\psi(x)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{x}\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_i)}{\Gamma(b_i)}\right\}$$

$$\times\int_0^\infty (t/x)^\lambda\ {}_{k+1}F_k(\lambda+1,\,a_1,\ldots,a_k;\,b_1,\ldots,b_k;\,-xu)\,h(u)\,du. \quad (8)$$

यदि $R(\lambda)\geqslant 0,\ R(\lambda+max\,a_j)<-1,\ x>0$

$h\epsilon L(0,\,\infty),\ b_i\neq 0,\,-1,\,-2,\ldots;\ i=1,\ldots,k$ तथा ${}_{k+1}F_k(x)$

सामान्य सार्वत्रीकरण हाइपरज्यामितीय फलन है।

उपपत्ति (6) तथा (7) से यह ज्ञात होता है कि

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_j)}{\Gamma(b_j)}\right\}\int_0^\infty e^{-xu}[(tu)^\lambda\ {}_kF_k(a_1,\ldots,a_k;\,b_1,\ldots,b_k;\,-tu)\,h(t)\,dt]\times du.$$

समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_j)}{\Gamma(b_j)}\right\}\int_0^\infty t^\lambda h(t)\,dt\int_0^\infty e^{-ux}\,u^\lambda\ {}_kF_k(a_1,\ldots,a_k;\,b_1,\ldots,b_k;\,-tu)\times du$$

ज्ञात परिणाम [2, p. 219] के द्वारा u-समाकल का मान निकालने पर

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-px}\ {}_pF_q(a_1\ldots,a_p;\,b_1,\ldots,b_q;\,-ax)\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{p\lambda+1}\ {}_{p+1}F_q(a_1,\ldots,a_p,\,\lambda+1;\,b_1,\ldots,b_q;\,-ap) \quad (9)$$

जहाँ $R(\lambda)>-1,\ R(\lambda)>0$ यदि $p=q$ तथा $R(p)>-R(a)$, यदि $p=q$, तो हमें (8) की प्राप्ति होती है।

फाबिनी प्रमेय [1] के आधार पर समाकलन के क्रम को परिवर्तित कर पाना विहित है।

उपप्रमेय 1. यदि $k=1$ तो जोशी [3, p. 976] द्वारा दिये गये स्टाइल्जे परिवर्त के सार्वत्रीकरण में $\phi(x)$ परिवर्तित हो जाता है

$$\phi(x)=\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(\lambda+1)}{x\Gamma(b_1)}\int_0^\infty (t/x)^\lambda {}_2F_1(\lambda+1,\, a_1:\, b_1;\, -t/x)\, h(t)\, dt. \tag{10}$$

उपप्रमेय 2. $k=2,\ b_2=1,\ \lambda=0$ होने पर (8) से स्वरूप [7, p.106] द्वारा दिया गया स्टाइल्जे परिवर्तन के सार्वत्रीकरण की प्राप्ति होती है।

$$\phi(x)=\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{x\Gamma(b_1)}\int_0^\infty {}_2F_1(a_1,\, a_2;\, b_1;\, -t/x)\, h(t)\, dt. \tag{11}$$

उपप्रमेय 3. यदि $k=1,\ \lambda=0,\ a_1=2m+1, b_1=\frac{3}{2}-k+m$ तो हमें वर्मा [8] द्वारा दिया गया सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त प्राप्त होता है।

$$\phi(x)=\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}-k+m)}\,\frac{1}{x}\int_0^\infty {}_2F_1(2m+1,\ 1;\ \tfrac{3}{2}-k+m,-t/x)\, h(t)\, dt. \tag{12}$$

उपप्रमेय 4. यदि $a_1=b_1,\ \lambda=0,\ k=1$ तो (8) से विख्यात स्टाइल्जे परिवर्त [8, p. 323] प्राप्त होता है :

$$\phi(x)=\int_0^\infty (x+t)^{-1} h(t)\, dt. \tag{13}$$

3. निम्नांकित प्रमेय से $h(x)$ के लिये सिद्ध किये जाने वाले समाकल समीकरण (8) का हल प्राप्त होता है।

प्रमेय 2. यदि $f(x)$ एक फलन हो जो

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{-s}}{\xi(s)}\, ds \tag{14}$$

द्वारा पारिभाषित होता है जहाँ

$$\xi(s)=\Gamma(s)\,\Gamma(\lambda-s+1)\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_i-\lambda+s-1)}{\Gamma(b_i-\lambda+s-1)}\right\}$$

तो
$$h(u)=\Gamma(\lambda+1)\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_j)}{\Gamma(b_j)}\right\}\times\int_0^\infty\frac{\psi(x)\,f(u/x)}{x}\, dx, \tag{15}$$

यदि $|f(x)|$ विद्यमान हो, $\psi(x)\epsilon L(0, \infty)$, $R(\lambda)>s+1$, $x^{c-1}h(x)\epsilon L(0, \infty)$, $R(a_j)>\lambda-s+1$ यदि $j=1, 2,\ldots, k$; $b_i\neq 0, -1, -2$ यदि $i=1, 2,\ldots, k$.

उपपत्ति. (8) में दोनों ओर x^{s-1} से गणा करने पर तथा 0 एवं ∞ के मध्य समाकलित करने पर हम देखते हैं कि

$$\int_0^\infty x^{s-1}\psi(x)\,dx=\Gamma(\lambda+1)\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_i)}{\Gamma(b_i)}\right\}$$

$$\times\int_0^\infty x^{s-2}\left[\int_0^\infty (t/x)^\lambda\ {}_{k+1}F_k(\lambda+1, a_1,\ldots, a_k; b_1,\ldots, b_k; -xt)\times h(t)\,dt\right]dx$$

बाईं ओर समाकल के चरों में थोड़ा सा परिवर्तन करने पर वह

$$\int_0^\infty x^{s-1}\psi(x)\,dx=\Gamma(\lambda+1)\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_j)}{\Gamma(b_j)}\right\}$$

$$\times\int_0^\infty t^{s-1}h(t)\,dt\int_0^\infty u^{\lambda-s}\ {}_{k+1}F_k(\lambda+1, a_1,\ldots, a_k, b_1,\ldots, b_k, -u)\,du$$

रूप धारण कर लेता है। यदि अब इस सूत्र [1, p. 337] द्वारा u-समाकल का मान ज्ञात करें

$$\int_0^\infty x^{s-1}\ {}_pF_q(a_1,\ldots, a_p; b_1,\ldots, b_q; -x)\,dx$$

$$=\frac{\Gamma(s)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j-s)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j-s)}, \tag{16}$$

जहाँ $s>0$, $R(a_j)>0$ यदि $j=1,2,\ldots,p$; $b_j\neq 0, -1, 2$, $j=1, 2,\ldots,p$ तो हमें ज्ञात होगा कि

$$\int_0^\infty t^{s-1}h(t)\,dt=\Gamma(\lambda+1)\prod_{i=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(a_f)}{\Gamma(b_j)}\right\}\left[\xi(s)\right]^{-1}$$

$$\times\int_0^\infty x^{s-1}\psi(x)\,dx$$

मेलिन के प्रतीपन सूत्र का प्रयोग करने पर तथा पुनः समाकलन के क्रम को बदल देने पर हमें इस परिणाम की प्राप्ति होती है। समाकलन का क्रम-परिवर्तन फाबिनी के प्रमेय द्वारा वैध है।

(8) में प्राचलों का उपयुक्त मान प्रदान करने पर पिछले अनुभाग में दिये गये उपप्रमेयों में विभिन्न स्टाइल्जे परिवर्तों के प्रतीपन-सूत्र प्राप्त होते हैं।

निर्देश

1. बर्किल, जे० सी०। The Lebesgue integral. **कैम्ब्रिज (इंगलैंड)**
2. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य। Tables of integral transforms, भा I. **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.
3. जोशी, जे० एम० सी०। **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1964, **14**, 969-75.
4. वही। **वही**, 1954, **14**, 975-85.
5. रेनविले, ई० डी०। Special functions. **मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क**, 1960.
6. सक्सेना, आर० के०। **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1966, **17**(4), 771-79.
7. स्वरूप, आर०। **एना० सोसा० साइं० ब्रुक्सेल**, 1964, **78**, 105-12.
8. वर्मा, आर० एस०। **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1951, **20**, 209-16,
9. विडर, डी० वी०। The Laplace transform. **प्रिंसटन यूनिवर्सिटी प्रेस**, 1946.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 127-129

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIK
1967, 10, 127-129

थोरान को क्रोमोजनी अभिकर्मक के रूप में प्रयुक्त करते हुये थोरियम (IV) का सूक्ष्ममापन

सत्येन्द्र पी० संगल
लक्ष्मी नारायन इंस्टीट्यूट आफ टेकनालाजी
नागपुर विश्वविद्यालय, नागपुर

[प्राप्त—मार्च 30, 1967]

सारांश

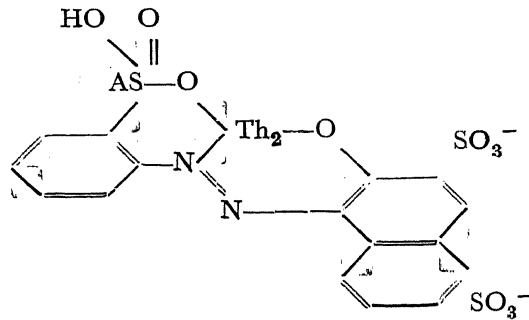
1 (0-आर्सेनोफेनिलएजो)–2–नैप्थाल 3:6 डाइसल्फोनेट को जिसे संक्षेप में थोरान कहा जाता है थोरियम के निश्चयन में क्रोमोजनी अभिकर्मक (chromogenic reagent) के रूप में प्रयुक्त किया गया है। जिस परास में बियर का नियम लागू होता है वह 6·3 से लेकर 342 अंश प्रति करोड़ अंश थोरियम है। पी-एच 3·0 पर अभिक्रिया की संवेदनशीलता 0·96γ / सेमी०^2 है। 1:2 (Th(IV)-थोरान) कीलेट का अवशोषण स्पेक्ट्रा 515 $m\mu$ पर है।

Abstract

Microdetermination of thorium(IV) using 1(*O*-arsenophenylazo 2-naphthol-3:6 disulphonate (Thoron) as a chromogenic reagent. *By* Satendr P. Sangal, Laxminarayan Institute of Technology, University of Nagpur, Nagpur.

1—(0-arsenophenylazo)-2-naphthol 3:6 disulphonate trivially known as Thoron has been used as a chromogenic reagent in the determination of thorium. The range for adherence to Beer's law is between 0·63 and 34·2 p.p.m. of thorium. The sensitivity of the reaction as defined by Sandell is 0·096γ/cm^2 at pH 3·0. The absorption spectra of the 1:2 (Th(iv)-Thoron) chelate lies at 515 $m\mu$.

1–(0–आर्सेनोफेनिल एजो)–2 नैप्थाल 3:6 डाइसल्फोनेट जिसे संक्षेप में थोरान (संक्षिप्त रूप APANS) कहते हैं अनेक धातु आयनों के सूक्ष्म मापन में क्रोमोजनी अभिकर्मक एवं कीलेटोक्रोम सूचक[1] की भाँति अत्यन्त विस्तृत रूप से प्रयुक्त किया जाता है। संगल तथा दे ने पैलैडियम[2] थोरियम[3] यूरेनियम[4] तथा विरल मृदाओं[5] के कीलेटों का अन्वेषण किया है। इस अभिकर्मक का उपयोग इन धातुओं के सूक्ष्ममापन में क्रोमोजनी अभिकर्मक के रूप में भी किया गया है। प्रस्तुत सूचना के अन्तर्गत APANS

का प्रयोग स्पेक्ट्रोफोटोमापी विधि से थोरियम के सूक्ष्ममापन के लिये किया गया है । थोरियम APANS कीलेट की संरचना को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है:

HO O
AS—O
Th_2—O
SO_3^-
N
N
SO_3^-

प्रयोगात्मक

पी-एच का मापन लीड्स तथा नार्थ्रप के प्रत्यक्ष पी-एच मापी द्वारा किया गया ।

अवशोषणांक मापन क्लेट समरसन फोटोइलेक्ट्रिक रंगमापी द्वारा फिल्टर संख्या 54 (पारगमन 520—580 $m\mu$) के साथ किये गए। विलयनों को 1 सेमी० व्यास वाली क्लेट परीक्षण नलियों में लिया गया ।

थोरान का संग्रह विलयन आसुत जल में तैयार किया गया । थोरियम क्लोराइड को आसुत जल में घोलकर थोरियम को आक्सैलेट के रूप में अवक्षेपित करके थोरियम का मान ज्ञात किया गया । इसके तनूकरण से विभिन्न सान्द्रता वाले विलयन तैयार किये गये ।

समस्त प्रयोगों को 25° से० पर किया गया । विलयनों के पी-एच को 3·0 पर रखा गया और प्रत्येक अवस्था में सम्पूर्ण आयतन 20 मिली० था । अवशोषणांकों को 545 $m\mu$ पर मापा गया । इसके लिये तरंग दैर्ध्य उच्चिष्ट का व्यवहार नहीं किया गया क्योंकि λ उच्चिष्ट पर अभिकर्मक का ही अवशोषणांक पर्याप्त है ।

विवेचना

कीलेट का अवशोषण स्पेक्ट्रा

अभिकर्मक के उच्चिष्ट अवशोषणांक का तरंग दैर्ध्य पी-एच 3·0 पर 480 $m\mu$ है जबकि कीलेट का 515 $m\mu$ है । इसे वासवर्ग तथा कूपर की विधि द्वारा निश्चित किया गया है ।

पी-एच के साथ कीलेट का स्थायित्व :

थोरियम तथा थोरान के कई मिश्रण तैयार किये गये जिनमें उनका अनुपात 1:2 था । इन मिश्रणों के अवशोषणांक विभिन्न पी-एच मानों पर 400 $m\mu$ से 650 $m\mu$ तक मापे गये । 1·0 से लेकर 6·5 पी-एच के बीच कीलेट स्थायी पाया गया ।

कीलेट के अवशोणांकों पर पी-एच का प्रभाव :

1·0 से लेकर 7·0 पी-एच वाले विभिन्न मिश्रण तैयार किये गये जिनमें थोरियम तथा थोरान का अनुपात 1:2 था और 545$m\mu$ पर उनके अवशोषणांकों का मापन किया गया। यह देखा गया कि 2·0 से लेकर 5·0 पी-एच के बीच अवशोषणांक स्थिर रहता है।

कीलेट की तीव्रता पर थोरान सान्द्रता का प्रभाव

पी-एच 3·0 पर थोरियम तथा थोरान का आणुक अनुपात बढ़ाते हुये विलयन तैयार करके 545$m\mu$ पर उनके अवशोषणांक ज्ञात किये गये। जब थोरान की 3-4 गुना आणुक अधिकता होती है तो कीलेट की अधिकतम रंग-तीव्रता देखी जाती है।

बियर सिद्धान्त का पालन

थोरियम की जिस सान्द्रता के परास में बियर सिद्धान्त का पालन होता है उसे ज्ञात किया गया। इसके लिये विभिन्न सान्द्रता के थोरियम क्लोराइड विलयन लिये गये और उनमें थोरान को चौगुनी मात्रा में मिला कर पी-एच को 3·0 पर स्थिर करके आयतन 25 मिली॰ बना लिया गया। अब फिल्टर 54 का प्रयोग करते हुए रंगमापी द्वारा अवशोषणांक ज्ञात किये गये। यह देखा गया कि बियर के नियम का पालन 6·3 से 342 अंश थोरियम प्रति एक करोड़ अंश के परास में होता है।

संवेदनशीलता सूचक

अभिक्रिया का संवेदनशीलता सूचक पी-एच 3·0 तथा 545 $m\mu$ पर 0·095γ/सेमी॰ पाया गया

कृतज्ञता-ज्ञापन

यह कार्य इलाहाबाद विश्वविद्यालय के रसायन विभाग में डा॰ ए॰ के॰ दे की प्रयोगशाला में सम्पन्न हुआ फलतः लेखक डा॰ दे का आभारी है।

निर्देश

1. जान्स्टन, एम॰ बी॰, बर्नार्ड, ए॰जे॰ तथा ब्रोड, डब्लू॰ सी॰। **रेविस्टा द ला यूनिर्सिटाड इंडस्ट्रियल द सेण्टान्डर,** 1960, **2,** 137.
2. संगल, एस॰पी॰ तथा दे, ए॰के॰। **माईक्रोकेमि॰ जर्न॰,** 1963, **7,** 257.
3. वही। **जर्न॰ इण्डि॰ केमि॰ सोसा॰,** 1963, **40,** 279.
4. वही। **जर्न॰ प्रैक्टि॰ केमि॰,** 1964, **20,** 219.
5. संगल, एस॰ पी॰, सिनहा एस॰ एन॰ तथा दे, ए॰ के॰। **टलेण्टा (प्रेषित)**

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 131-135

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 131-135

लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों में जौ की वृद्धि एवं परासरण दाब में सम्बन्ध

शिवगोपाल मिश्र तथा देवेन्द्र प्रसाद शर्मा

कृषि रसायन शाखा, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—मार्च 1, 1967]

सारांश

लवणीय मिट्टी में 1.02 परासरण दाब (O. P.) तक जौ की वृद्धि होती है किन्तु क्षारीय मिट्टी में 1·15 से कुछ कम तक। यदि इनसे K-मिट्टियाँ तैयार की जाती हैं जो उनके परासरण दाब क्रमशः 0.36 एवं 0·32 हो जाते हैं जिनमें समान रूप से जौ की वृद्धि होनी चाहिए किन्तु संयोगवश क्षारीय मिट्टी में (0.32 परासरण दाब) जौ की वृद्धि नहीं होती। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि केवल परासरण दाब पर ही जौ की वृद्धि निर्भर नहीं करती वरन् विनियम-संकीर्ण में धनायन की उपस्थिति पर भी वह निर्भर करती है।

Abstract

Osmotic pressure in relation to the growth of barley plants in saline and alkali soils. *By* S. G. Misra and D. P. Sharma, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, (U.P.).

The growth of barley takes place upto an osmotic pressure (O.P.) of 1·02 in saline soil and 1·15 in alkali soil. If K-soils are prepared out of these soils, the respective osmotic pressure are 0·36 and 0·32. These derivative soils should exhibit similar growth of barley but incidentally no growth takes place in the K-soil derived from alkali soil. It shows that it is not only the osmotic pressure but also the nature of cation saturating the exchange-complex which affects barley growth.

संयुक्त राज्य अमरीका की लवणता-प्रयोगशाला[1] में फसलों की लवण-सहनशीलता salt tolerance) पर कार्य हो चुका है जिसके अनुसार फसलों को उनकी लवण-सहनशीलता के अनुसार वर्गीकृत किया गया है। इस वर्गीकरण के अन्तर्गत जौ को अच्छी लवण-सहनशील फसल के रूप में रखा गया है।

प्रारम्भिक काल के कुछ कार्यकर्त्ताओं ने पौदों के विकास में लवण की सान्द्रता पर विशेष बल दिया और कुछ ने विशिष्ट आयनों के महत्व को स्वीकारा। उदाहरणार्थ, वैडले तथा गौच[2] ने बालू-सम्बर्ध में

(Ca^{++}, Mg^{++} तथा Na^{+}) के प्रभावों की तुलना की। किन्तु मैजिस्टाड तथा राइटेमियर[3] ने परासरण दाब (O.P.) को अनेक फसलों की वृद्धि के लिए उपयोगी सूचक बताया। पौदों के लिए जल की उपलब्धि उच्च परासरण दाब द्वारा अत्यधिक प्रभावित होती है।

प्रस्तुत अध्ययन में लवणीय तथा क्षारीय मिट्टियों में उपस्थित लवणों से जन्य परासरण दाब का प्रभाव जौ के पौदों की वृद्धि पर देखा गया है। इसके अन्तर्गत सुधरी हुई क्षारीय एवं लवणीय मिट्टियों पर भी अध्ययन किया गया है। इसके लिए ऐल्यूमिनियम सल्फेट, फेरस अमोनियम सल्फेट एवं पोटैशियम क्लोराइड द्वारा मिट्टियों को उपचारित किया गया है।

प्रयोगात्मक

इस अध्ययन के लिए दो मिट्टियों का प्रयोग हुआ। एक लवणीय मिट्टी, जो घूरपुर (इलाहाबाद) से एकत्र की गई थी और दूसरी क्षारीय मिट्टी जो मेजा (इलाहाबाद) से लाई गई थी। इनके साथ निम्नांकित उपचार किये गए।

I (क) क्षारीय मिट्टी (नियन्त्रण प्रयोग)

(ख) ऐल्यूमिनियम सल्फेट, फेरस अमोनियम सल्फेट, स्पैंटिन से निक्षालित क्षारीय मिट्टी (कोई उर्वरक नहीं डाले गये)

(ग) क्षारीय मिट्टी से तैयार की गई पोटाशीय मिट्टी (K-मिट्टी) जिसे उर्वरक सहित या उरर्वक-रहित प्रयुक्त किया गया

(घ) क्षारीय मिट्टी जिसमें (ख) के अन्तर्गत उल्लिखित सुधारक ठोस रूप में डाल कर निक्षालन नहीं किया गया

II लवणीय मिट्टी के साथ भी क्षारीय मिट्टी के ही सदृश सभी उपचार किये गये।

मिट्टियों को पालीथीन की बाल्टियों में भर कर जौ के बीज बोकर जौ की वृद्धि देखी गई। प्रत्येक बाल्टी में 500 ग्राम मिट्टी (उपचारित या अनुपचारित) ली गई।

प्रत्येक बाल्टी में 60 पौंड N, 40 पौंड P_2O_5 तथा 40 पौंड K_2O प्रति एकड़ मिट्टी की दर से NPK उर्वरक डाले गये। जो उर्वरक प्रयुक्त हुये वे थे--अमोनियम सल्फेट, कैल्सियम फास्फेट तथा पोटैशियम क्लोराइड।

बाल्टियों की मिट्टी को उपयुक्त आर्द्रता तक जल से सिक्त करके प्रत्येक बाल्टी में जौ के 4 बीज बोये गये और पौदों की वृद्धि 1 मास तक देखी गई।

सारणी 1

परासरण दाब (O.P.)* तथा जौ की वृद्धि में सम्बन्ध

मिट्टी तथा उपचार	पी-एच	E.C × 10^3 मिलीमहो/सेमी०	परासरण दाब O. P.	वृद्धि *
(क) क्षारीय मिट्टी (अनुपचारित)	10·4	3·2	1·15	—
ऐल्युमिनियम सल्फेट से धोई	7·0	0·7	0·25	+
फेरस अमोनियम सल्फेट से धोई	7·4	0·64	0·23	+
स्पैर्टिन से धोई	8·1	1·0	0·36	+
K-मिट्टी (क्षारीय)	9·0	0·9	0·32	—
K-मिट्टी+ऐल्युमिनियम सल्फेट (ठोस)	8·5	2·5	0·90	—
K-मिट्टी+फेरस अमोनियम सल्फेट (ठोस)	8·7	3·0	1·08	—
K-मिट्टी+स्पैर्टिन	8·8	4·2	1·51	—
क्षारीय मिट्टी+ऐल्युमिनियम सल्फेट (ठोस)	8·9	4·5	1·62	—
(ख) लवणीय मिट्टी (अनुपचारित)	8·5	10·5	3·60	—
ऐल्युमिनियम सल्फेट से धोई	5·0	2·2	0·79	+
फेरस अमोनियम सल्फेट से धोई	5·7	2·8	1·02	+
स्पैर्टिन से धोई	7·5	1·5	0·54	+
K-मिट्टी (लवणीय)	8·8	1·0	0·36	+
K-मिट्टी+ऐल्युमिनियम सल्फेट (ठोस)	6·7	1·5	0·54	—
K-मिट्टी+फेरस अमोनियम सल्फेट (ठोस)	6·8	1·7	0·55	—
K-मिट्टी+स्पैर्टिन	7·1	4·5	1·62	+
लवणीय मिट्टी+ऐल्युमिनियम सल्फेट (ठोस)	5·7	12·6	4·53	—

*परासरण दाब (O.P.) = EC × 0·36

\+ = निश्चित वृद्धि

— वृद्धि नहीं होती

पोटैशियम मिट्टी: (K--मिट्टी) : लवणीय या क्षारीय मिट्टी को KCl के नार्मल विलयन (मिट्टी : विलयन 1:10) के साथ हिलाकर रात भर सम्पर्क में रहने दिया गया। दूसरे दिन मिट्टी को फिल्टरन विधि द्वारा पृथक करके 95% एथैनॉल से धोकर सुखाकर चूर्ण कर लिया गया।

सुधारकों से उपचारित मिट्टी : दोनों मिट्टियों को 0·06% फेरस अमोनियम सल्फेट एवं ऐल्यूमिनियम सल्फेट के विलयन से तीन बार धोकर बीज उगाने के लिये प्रयुक्त किया गया। स्पैंटिन एक नवीन उर्वरक है। इसके 0·2% निलम्बन का प्रयोग किया गया।

परासरण दाब (O. P.) : परासरण दाब प्राप्त करने के लिये विभिन्न मिट्टियों को जल के साथ 1:5 अनुपात में हिलाकर छनित के विद्युच्चालकता मान (EC) ज्ञात किये गये। फिर EC मानों में 0·36 का गुणा करके O.P. ज्ञात किये गये।

$$O.P. = EC \times 0{\cdot}36$$

परासरण दाब एवं जौ के पौदों की बृद्धि में जो सम्बन्ध पाया गया वह सारणी 1 में अंकित है।

विवेचना

प्राप्त परिणामों से यह सूचित होता है कि 0·9 मिली म्हो/सेमी० विद्युच्चालकता पर ही (अर्थात् अत्यन्त न्यून लवण सान्द्रता पर ही) जौ के बीज नहीं उगते। इससे यह आभास मिलता है कि लवण की सान्द्रता ही नहीं वरन् अन्य कारक भी प्रभाव डाल रहे हैं---सम्भवतः यह विशिष्ट आयन का प्रभाव हो। इसी प्रकार 1·4 EC मान पर भी जौ के बीज उगने में समर्थ नहीं।

सारणी से यह देखा जा सकता है कि क्षारीय मिट्टी में 1·15 O.P. पर जौ की वृद्धि सीमित हो जाती है किन्तु यदि उसी मिट्टी को सुधारकों से धो दिया जाता है तो निश्चित बृद्धि होती है। सुधारकों से धोने पर क्षारीय मिट्टी का परासरण दाब 0·23-0·36 के बीच रहता है। किन्तु आश्चर्य की बात यह है कि इसी परास में K-मिट्टी का भी परासरण दाब, 0·32 पाया जाता है किन्तु इसमें जौ के पौदे बृद्धि नहीं कर पाते। इसमें K^+ आयनों की बहुलता है ($4m{\cdot}e/100g$)। यदि K-मिट्टी में सुधारकों को ठोस रूप में डाल कर उसे धोया नहीं जाता तो लवण की सान्द्रता बढ़ने (O.P. का मान बढ़ने) के कारण जौ की बृद्धि नहीं हो पाती।

लवणीय मिट्टी में जौ का अंकुरण नहीं होता। इसका परासरण दाब अत्यन्त निम्न है (0·36) किन्तु जब इस मिट्टी को सुधारकों से धो दिया जाता है तो अंकुरण के साथ ही पौदों की बृद्धि देखी जाती है। यदि सुधारकों को ठोस रूप में डालकर उन्हें धोये बिना जौ के बीज बोये जाते हैं तो अंकुरण या वृद्धि नहीं होती।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि मिट्टियों में परासरण दाब का न्यून मान जौ के उगने के लिये उपयुक्त सूचक नहीं माना जा सकता। धनायन की उपस्थिति के कारण, विशेषतः K के होने पर, न्यून मान पर भी जौ का अंकुरण एवं वृद्धि सम्भव नहीं।

निर्देश

1. यू० एस० सैलिनिटी लैबोरेटरी। Diagnosis and Improvement of Saline and alkali soils. U.S.D.A. Handbook No. 60, 1954.
2. वैडले तथा गौच। **सॉयल साइं०,** 1947, **58,** 399-403.
3. मैजिस्टाड, ओ० सी० तथा राइटेमियर, आर० एफ०। **वही,** 1943, **55,** 351-60.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 137-145

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 137-145

सार्वीकृत स्ट्रूव फलन वाले कतिपय समाकल

सी० एम० जोशी

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अप्रैल 21, 1966]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में हमने कतिपय ऐसे समाकलों (सान्त एवं अनन्त) का मान ज्ञात किया है जिसमें सार्वीकृत स्ट्रूव फलन

$$H_\nu^\lambda(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r(-\frac{1}{2}z)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(r+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+\lambda r+\frac{3}{2})}, \lambda>0$$

रहता है।

इन समाकलों से कई ज्ञात परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

Some integrals involving a generalized Struve function. *By* C. M. Joshi, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In the present paper we evaluate certain integrals (both finite and infinite) containing the generalized Struve function :—

$$H_\nu^\lambda(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r(\frac{1}{2}z)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(r+\frac{3}{2}\ \Gamma(\nu+\lambda r+\frac{3}{2})}, \lambda>0.$$

A number of known results are exhibited as special cases of our integrals.

§१. हाल ही में विख्यात स्ट्रूव फलन का सार्वीकरण निम्नांकित समता के द्वारा व्यक्त किया गया है

$$H_\nu^\lambda(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r(\frac{1}{2}z)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(r+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+\lambda r+\frac{3}{2})}$$

जहाँ $\lambda > 0$.

निम्नांकित समाकल पर विचार करें

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-at} t^{b-1} E(c, d::at) \; \overset{\lambda}{H_\nu}(xt)\, dt \tag{1.1}$$

जहाँ $R(a) > 0$, $R(\nu+b+c+1) > 0$, $R(\nu+b+d+1) > 0$ तथा $\lambda > 0$.

(1.1) का मान ज्ञात करने के लिए सार्वीकृत स्ट्रूव फलन के घातांक श्रेणी विस्तार को प्रतिस्थापित करते हैं और फिर समाकलन एवं समुच्चयन का क्रम बदल देते हैं, जो दी गई दशाओं में पूर्णतः विहित हैं। अब सुपरिचित सूत्र [6, p. 396] का प्रयोग करते हुये

$$\int_0^\infty e^{-at} t^{b-1} E(c, d::at)\, dt = \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(b+c+d)\, a^b}$$

जहाँ $R(a) > 0$, $R(b+c) > 0$ तथा $R(b+d) > 0$,

इस प्रकार हम देखते हैं कि

$$\int_0^\infty e^{-at} t^{b-1} E(c, d::at) \; \overset{\lambda}{H_\nu}(xt)\, dt$$

$$= \frac{x^{\nu+1}\, \Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(\nu+b+c+1)\Gamma(\nu+b+d+1)}{2^\nu a^{\nu+b+1} \sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+b+c+d+1)}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\nu+b+c+1)_{2r}(\nu+b+d+1)_{2r}}{(\frac{3}{2})_r (\nu+\frac{3}{2})_{\lambda r} (\nu+b+c+d+1)_{2r}} \left(-\frac{x^2}{4a^2}\right)^r, \tag{1.2}$$

यदि $R(a) > 0$, $R(\nu+b+c+1) > 0$, और $R(\nu+b+d+1) > 0$.

λ के धन पूर्णसंख्यक मान होने पर (1.2) से

$$\int_0^\infty e^{-at} t^{b-1} E(c, d::at) \; \overset{\lambda}{H_\nu}(xt)\, dt$$

$$= \frac{x^{\nu+1}\, \Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(\nu+b+c+1/2)\Gamma(\nu+b+d+1/2)}{2^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+b+c+d+1)}$$

$$\times {}_5F_{\lambda+3}\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+b+c+1}{2}, \frac{\nu+b+d+1}{2}, \frac{\nu+b+c+2}{2}, \frac{\nu+b+d+2}{2}; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+b+d+c+1}{2}, \frac{\nu+b+c+d+2}{2}, \Delta(\lambda, \nu+\frac{3}{2});\end{matrix} \; \frac{-x^2}{a^2\lambda^\lambda}\right] \tag{1.3}$$

प्राप्त होता है जहाँ $\Delta(k, \alpha)$ द्वारा k प्राचलों की श्रेणी व्यक्त होती है :

$$\frac{\alpha}{k}, \frac{\alpha+1}{k}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\alpha+k-1}{k}.$$

इसी प्रकार यह दर्शाया जा सकता है कि

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-ay^2} y^{b-1} E(c, d::at)\, H_\nu^\lambda(xy)\, dy$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}x)^{\nu+1} \Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma\left(\frac{\nu+b+1}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{\nu+b+1}{2}+d\right)}{\sqrt{\pi}\, a^{1/2(\nu+b+1)}\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma\left(\frac{\nu+b+1}{2}+c+d\right)}$$

$$\times {}_3F_{\lambda+2}\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+b+1}{2}+c, \frac{\nu+b+1}{2}+d; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+b+1}{2}+c+d, \Delta(\lambda, \nu+\frac{3}{2};\end{matrix} \; -\frac{x^2}{4a^2\lambda^\lambda}\right] \tag{1.4}$$

यदि दशायें निम्नांकित प्रकार हों

$$R(a)>0, \; R\left(\frac{\nu+b+1}{2}+c\right)>0, \; R\left(\frac{\nu+b+1}{2}+d\right)>0$$

और λ धन पूर्णसंख्या हो ।

§२. इस अनुभाग में हम (1·3) तथा (1.4) समाकलों की विशिष्ट दशाओं का विवेचन करेंगे । सूत्र [6, p. 351]

$$E(\alpha,\beta::x) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\, x^{-k} e^{1/2x}\, W_{k,m}(x), \tag{2.1}$$

का प्रयोग करने पर जहाँ $k=\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)$, $m=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, तथा संकेतों में थोड़ा परिवर्तन लाने पर (1.3) का रूप

$$\int_0^\infty e^{-1/2at}\, t^{l-1}\, \overset{\lambda}{H_\nu}(xt)\, W_{k,m}(at)\, dt$$

$$=\frac{x^{\nu+1}\,\Gamma\nu+l+m+\frac{3}{2})\,\Gamma(\nu+l-m+\frac{3}{2})}{2^\nu\, a^{\nu+l+2k+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+l-k+\frac{3}{2})}$$

$$\times {}_5F_{\lambda+3}\left[\begin{matrix} 1, \frac{\nu+l+m}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu+l-m}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu+l+m}{2}+\frac{5}{4}, \frac{\nu+l-m}{2}+\frac{5}{4}; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+l-k}{2}+1; \frac{\nu+l-k}{2}+\frac{3}{2}, \triangle(\lambda,\nu+\frac{3}{2}); \end{matrix} -\frac{x^2}{a^2\lambda^\lambda}\right] \tag{2.2}$$

हो जावेगा जो सत्य उतरता है यदि

$R(a)>0,\ R(\nu+l+m+\frac{3}{2})>0,\ R(\nu+l-m+\frac{3}{2})>0$ और $\lambda\geqslant 1$.

$k=0,\ m=\mu$ रखने पर तथा

$$K_\mu(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} W_{0,\mu}(2z),$$

का व्यवहार करने पर सूत्र (2.2) से

$$\int_0^\infty e^{-1/2at}\, t^{l-1}\, \overset{\lambda}{H_\nu}(xt) K_\mu(\tfrac{1}{2}at)\, dt$$

$$=\frac{x^{\nu+1}\Gamma(\nu+l+\mu+1)\Gamma(\nu+l-\mu+1)}{2^\nu\, a^{\nu+l+1}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\,\Gamma(\nu+l+\frac{3}{2})}$$

$$\times {}_5F_{\lambda+3}\left[\begin{matrix} 1, \frac{\nu+l+\mu}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l-\mu}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l+\mu}{2}+1, \frac{\nu+l-\mu}{2}+1; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+l}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu+l}{2}+\frac{5}{4}, \triangle(\lambda,\nu+\frac{3}{2}); \end{matrix} -\frac{x^2}{a^2\lambda^\lambda}\right] \tag{2.3}$$

प्राप्त होगा जो

$R(a)>0,\ R(\nu+l+\mu+1)>0,\ R(\nu+l-\mu+1)>0$ तथा $\lambda\geqslant 1$ के लिये विहित होगा।

अब हम $k=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4},\ m=\frac{1}{4}$, रखते हैं और सूत्र

$$W_{\mu/2+1/4,\, 1/4}(\tfrac{1}{2}z^2)=\frac{\sqrt{z}}{2^{\mu/2+1/4}}D_\mu(z)$$

का उपयोग करते हैं जहाँ $D_\mu(z)$ परावलयिक सिलिंडर फलन व्यक्त करता है तो हम निम्नांकित परिणाम पाते हैं

$$\int_0^\infty e^{-1/2at}\, t^{l-1}\, \overset{\lambda}{H_\nu}(xt)\, D_\mu(\sqrt{2at})\, dt$$

$$=\frac{x^{\nu+1}\Gamma(\nu+l+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+l+1)}{2^{\nu-\mu/2}a^{\nu+l+\mu+3/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+l-\mu/2+\frac{3}{2})}$$

$$\times {}_5F_{\lambda+3}\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+l}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu+l}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l}{2}+\frac{5}{8}, \frac{\nu+l}{2}+1; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+l}{2}-\frac{\mu}{4}+\frac{3}{4}, \frac{\nu+l}{2}-\frac{\mu}{4}+\frac{5}{8}, \triangle(\lambda, \nu+\frac{3}{2});\end{matrix} -\frac{x^2}{a^2\lambda^\lambda}\right], \tag{2.4}$$

जहाँ $R(a)>0,\ R(\nu+l+1)>0,\ R(\nu+l+\frac{3}{2})>0$ तथा $\lambda\geqslant 1$.

अब $k=n+\left\{\frac{m+1}{2}\right\}$, मान कर तथा m को $\frac{m}{2}$ द्वारा प्रतिस्थापित करके और

$$W_{n+m/2+1/2,\, m/2}(x^2)=n!\,\Gamma(m+n+1)\, e^{-x^2}\, x^{m+1}\ \overset{n}{T_m}(x^2),$$

का उपयोग करने पर,

$\overset{n}{T_m}(x)$ सोनाइन बहुपदी है, (2.2) की विशिष्ट दशा प्राप्त होगी :

$$\int_0^\infty e^{-3/2at}\, t^{l-1}\, \overset{\lambda}{H_\nu}(xt)\ \overset{n}{T_m}(at)\, dt$$

$$=\frac{x^{\nu+1}\Gamma(\nu+l+1)\Gamma(\nu+l-m+1)}{2^\nu a^{\nu+l+m+2n+2}\sqrt{\pi}\, n!\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(m+n+1)\Gamma(\nu+l-m-n+1)}$$

$$\times {}_5F_{\lambda+3}\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+l}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l-m}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l}{2}+1, \frac{\nu+l-m}{2}+1; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+l-m-n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l-m-n}{2}+1, \triangle(\lambda, \nu+\frac{3}{2});\end{matrix} -\frac{x^2}{a^2\lambda^\lambda}\right] \tag{2.5}$$

जहाँ $R(a)>0,\ R(\nu+l+1)>0,\ R(\nu+l-m+1)>0$, तथा $\lambda \geqslant 1$.

और चूँकि

$$T_m^n(x)=\frac{(-)^n}{\Gamma(m+n+1)} L_n^m(x)$$

अतः हमें

$$\int_0^\infty e^{-3/2at}\, t^{l-1} H_\nu^\lambda(xt)\, L_n^m(at)\, dt$$

$$=\frac{(-)^n x^{\nu+1}\Gamma(\nu+l+1)\Gamma(\nu+l-m+1)}{2^\nu a^{\nu+l+m+2n+2}\sqrt{\pi}\, n!\, \Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+l-m-n+1)}$$

$$\times {}_5F_{\lambda+3}\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+l}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l-m}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l}{2}+1, \frac{\nu+l-m}{2}+1; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+l-m-n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\nu+l-m-n}{2}+1, \Delta(\lambda, \nu+\frac{3}{2});\end{matrix} -\frac{x^2}{a^2\lambda^\lambda}\right] \tag{2.6}$$

भी प्राप्त होगा यदि

$R(a)>0,\ R(\nu+l+1)>0,\ R(\nu+l-m+1)>0$ और $\lambda \geqslant 1$.

ऊपर दी गई विधि का अनुसरण करने पर हमें सरलता से सुप्रसिद्ध सूत्र (*cf.* [1], § 3) प्राप्त होगा जो समाकल

$$\int_0^\infty e^{-1/2ay^2}\, y^{l-1}\, W_{k,n}(ay^2)\, H_\nu^\lambda(xy)\, dy$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}x)^{\nu+1}\,\Gamma\left(\frac{\nu+l+2}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{\nu+l+2}{2}-m\right)}{a^{1/2(\nu+l+1)}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\,\Gamma\left(\frac{\nu+l+3}{2}-k\right)}$$

$$\times {}_3F_{\lambda+2}\left[\begin{matrix}1, \frac{\nu+l+2}{2}+m, \frac{\nu+l+2}{2}-m; \\ \frac{3}{2}, \frac{\nu+l+3}{2}-k, \Delta(\lambda, \nu+\frac{3}{2});\end{matrix} -\frac{x^2}{4a\lambda^\lambda}\right] \tag{2.7}$$

की विशिष्ट दशायें हैं ।

$$R(a)>0,\ R\left(\frac{\nu+l}{2}+m+1\right)>0,\ \left(\frac{\nu+l}{2}-m+1\right)>0 \text{ तथा } \lambda\geqslant 1, \text{ जो} \quad (2.1)$$

सम्बन्ध से (1.4) से निकलता है। विशेषतः जब $a=1$ तो यह सूत्र [1, p. 195(3.1)] में परिणत हो जाता है ।

और भी यदि हम $k=m+\frac{1}{2}$ रखें और

$$W_{m+1/2,\pm m}(x)=x^{m+1/2}e^{-x}$$

का उपयोग करें तो इससे हमें

$$\int_0^\infty e^{-ay^2}\, y^{2\mu}\, H_\nu^\lambda(xy)\, dy$$

$$=\frac{(\frac{1}{2}x)^{\nu+1}\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{2}+1\right)}{a^{\mu+\nu/2+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}$$

$$\times {}_2F_{\lambda+1}\left[\begin{matrix}1, \frac{1}{2}\nu+\mu+1; & \\ \frac{3}{2}, \frac{2\nu+3}{2\lambda}, \frac{2\nu+5}{2\lambda}, \ldots \frac{2\nu+2\lambda+1}{2\lambda}; & -\frac{x^2}{4a\lambda^\lambda}\end{matrix}\right], \quad (2.8)$$

की प्राप्ति होगी जहाँ $R(a)>0$, $R(\nu+2\mu+2)>0$ तथा $\lambda\geqslant 1$,

अन्तिम सूत्र की विशिष्ट दशा $\lambda=1$ बृजमोहन [[7], देखें [3] भी, p. 355 (51)] के सुप्रसिद्ध परिणाम के संगत है ।

$a=1$, तथा $\lambda=2$, होने पर हमें [2, p. 248] लोमल फलनों की शब्दावली [8] के रूप में प्राप्त होगा :

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\, y^{1-\nu}\, H_\nu^2(xy)\, dy$$

पदों के रूप में हैं ।

$$=\frac{(4\nu^2-1)}{16\,\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}\, x \cdot S_{\nu-1,\,1/4}\left(\frac{x}{2}\right), \quad (2.9)$$

§3. अन्त में हम सूत्र [5] का व्यवहार करते हैं

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left[1+cx+d(1-x)\right]^{-a-b} dx$$

$$=(1+c)^{-a},\ (1+d)^{-b},\ B(a,\ b)$$

जहाँ $R(a), R(b)>0$, जिसमें अचर c तथा d ऐसे हैं कि $1+c$, $1+d$ तथा

$[1+cx+d(1-x)]\neq 0$, तथा $0<x<1$, और हम सिद्ध करते हैं कि

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left[1+cx+d(1-x)\right]^{-a-b} \overset{\lambda}{H}_\nu\left\{\frac{zx^\mu(1-x)^\sigma}{[1+cx+d(1-x)]^{\mu+\sigma}}\right\} dx$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r(\frac{1}{2}z)^\alpha(1+c)^{-a-\mu\alpha}(1+d)^{-b-\sigma\alpha}}{\Gamma(r+\frac{3}{2})\,\Gamma(\nu+\lambda r+\frac{3}{2})}B(a+\mu\alpha,\ b+\sigma\alpha), \quad (3.1)$$

जहाँ $\alpha=\nu+2r+1$ तथा वैधता की दशायें हैं $1+c$, $(1+d)$, और $[1+cx+d(1-x)]\neq 0$,

तथा $$R(a+\mu\alpha)>0,\ R(b+\sigma\alpha)>0,$$

तथा $0<x<1$। विशिष्ट दशा $c=d=\sigma=0$ में यदि हम $x=\sin^2\theta$ रखें और उपयुक्त ढंग से संकेत बदल दें तो (3.1) से सुस्पष्ट परिणाम [2, p. 244]

$$\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{(\nu+1)(2-\lambda)}(\cos\theta)^{2\rho+1}\overset{\lambda}{H}_\nu(z\sin^\lambda\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{2^\rho\Gamma(\rho+1)\overset{\lambda}{H}_{\nu+\rho+1}(z)}{z^{\rho+1}}, \quad (3.2)$$

की प्राप्ति होगी जो $R(\nu+\frac{3}{2})>0$, $R(\rho+1)>0$, तथा $\lambda>0$ के लिये सत्य है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० एच० एम० श्रीवास्तव, जोधपुर विश्वविद्यालय का अत्यन्त ही कृतज्ञ है जिन्होंने इस शोधपत्र के तैयार करने में सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. भौमिक, के० एन० । **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1962, **5**, 193-200.

2. वही । **जर्न० साइं० रिसर्च, बनारस हिन्दू यूनि०**, 1962-63, **13**, 244-51.

3. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य । Tables of Integral Transfo ms, भाग I, **मैकग्राहिल**, 1954.

4. वही । Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, 1954.

5. मैकराबर्ट, टी० एम० । Mathematische Annalen, 1961, **142**, 450-52.

6. वही । Functions of a Complex Variable, **पंचम संस्करण, मैकमिलन**, 1962.

7. बृजमोहन । **क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड)**, 1942, **13**, 40-47.

8. वाट्सन, जी० एन० । Theory of Bessel functions. **द्वितीय संस्करण, कैम्ब्रिज**, 1958.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 147-159

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 147-159

मैंगनीज के प्रकारों पर विभिन्न कारकों का प्रभाव

शिव गोपाल मिश्र तथा प्रेम चन्द्र मिश्र

कृषि रसायन शाखा, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय,
इलाहाबाद

[प्राप्त—जून 1, 1967]

सारांश

उत्तर प्रदेश की दो प्रमख मिट्टियों (काली तथा लाल) पर $CaCO_3$, $FeSO_4$, $CuSO_4$, मोनो कल्सियम फास्फेट, कार्बनिक पदार्थ एवं संतृप्तता तथा असंतृप्तता का प्रभाव देखा गया। इससे यह परिणाम निकला कि मिट्टी में कैल्सियम-कार्बोनेट डालने से विनिमेय मैंगनीज घटता है एवं अपचेय मैंगनीज में वृद्धि होने पर भी सक्रिय मैंगनीज की मात्रा कम होती जाती है। फेरस सल्फेट ($FeSO_4$) एवं ग्लूकोस (Glucose) डालने पर सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। कापर सल्फेट एवं मोनो कैल्सियम फास्फेट डालने से अपचेय मैंगनीज की मात्रा घटती है जब कि जल-विलेय (water soluble) मैंगनीज की मात्रा बढ़ती है

Abstract

Forms of manganese as affected by various factors. *By* S. G. Misra and P. C. Mishra, Agricultural Chemistry Section, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Effects of adding $CaCO_3$, $FeSO_4$, $CuSO_4$, monocalcium phosphate, organic matter and saturation or unsaturation on the forms of manganese were studied using two soil groups—black and red soils of Uttar Pradesh. Addition of $CaCO_3$ reduced the exchangeable form of manganese but increased the reducible form of Mn in both the soils. However a decrease in the active form of manganese is observed. Addition of glucose and $FeSO_4$ were found to increase the active form of manganese. Copper sulphate and monocalcium phosphate decreased the reducible form of Mn and increased water-soluble Mn.

बोकेन[1] एवं पेज[2] ने यह देखा कि मिट्टी में फेरस सल्फट डालन से सक्रिय मैंगनीज की मात्रा बढ़ जाती है। बोकेन न यह भी बतलाया कि फेरस सल्फेट के प्रयोग से विनिमेय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती

है । हाइन्टजे एवं मान[3] ने यह निर्धारित किया कि यदि अमोनियम ऐसीटेट में धनायन मिला दिये जायँ तो मिट्टी से और अधिक मैंगनीज निकल सकता है । लीपर[4] ने यह निर्धारित किया कि कापर सल्फेट एवं हाइड्रोक्विनोन दोनों मिट्टी से मैंगनीज की समान मात्रा ही निकालते हैं, इससे यह ज्ञात होता है कि कापर सल्फेट भी अपचेय मैंगनीज को प्रभावित करता है ।

र्यूथर, स्मिथ, गार्डनर एवं राय[5] ने यह प्रेक्षित किया कि संतरे के पेड़ फास्फेट की उपस्थिति में अधिक मैंगनीज का अवशोषण करते हैं। मारिस[6], रोज एवं डरमाट[7] लारसन[8], तथा स्पेन्सर[9] के अनसार भी फास्फट की उपस्थिति मैंगनीज को उपलब्ध बनाने में सहायक होती है । परन्तु लैम्ब[10] के अनुसार सुपर फास्फेट की अधिक मात्रा डालने से टमाटर के पौधों द्वारा अवशोषित मैंगनीज की मात्रा घट जाती है ।

सोहन्जन[11] के अनुसार मिट्टी में उपस्थिति हाइड्राक्सी अम्ल मैंगनीज डाई आक्साइड (MnO_2) का विलेय बना सकती है । हाइन्टजे एवं मान[12] तथा ब्रामफील्ड[13] ने बताया कि साइट्रेट, टार्टरेट, मैलेट तथा E.D.T.A. मैंगनीज डाइ आक्साइड को घुला सकते हैं जबकि मैलोनेट, सक्सिनेट एवं आक्सलेट का कोई प्रभाव नहीं पड़ता ।

प्रस्तुत अध्ययन में मिट्टी में मैंगनीज के सक्रिय रूप पर प्रभाव डालने वाले कारकों के सम्बन्ध में प्राप्त परिणाम दिये जा रहे हैं ।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिय उत्तर प्रदेश की दो प्रमुख मिट्टियाँ प्रयुक्त की गईं। वे हैं—बलिया जिले के करैल क्षेत्र से प्राप्त काली मिट्टी एवं मिर्जापुर जिले की विन्ध्याचल पहाड़ी से लाई गई लाल मिट्टी। इन मिट्टियों को प्रयोगशाला में लाकर सुखाया गया, फिर उन्ह पीसकर तथा चाल कर एवं ऊष्मक में सुखाकर स्वच्छ काँच की बोतलों में संग्रहीत किया गया ।

इन मिट्टियों में पी-एच०, कार्बोनेट, सेस्क्वी आक्साइड एवं धनायन विनिमय क्षमता (CEC) का निश्चयन किया गया । सम्पूर्ण मैंगनीज का निर्धारण रंगमापी पर आयोडेट विधि से किया गया[14] । जल विलेय, विनिमय, एवं अपचेय मेंगनीज ज्ञात करने के लिए मिट्टी को क्रमशः जल, उदासीन नार्मल अमोनियम ऐसीटेट एवं उदासीन अमोनियम ऐसीटेट में 0·2 प्रतिशत हाइड्रोक्विनोन विलयन द्वारा निक्षालित किया गया । मिट्टी का रासायनिक विश्लेषण सारणी 1 में दिया गया है ।

कारकों का प्रभाव

(१) **फेरस सल्फेट** का प्रभाव ज्ञात करने के लिय 5 ग्राम मिट्टी में 100 से 1000 ppmFe^{++} फेरस सल्फेट के रूप में 50 मिली० जल के साथ मिलाया गया । विलयन के साथ मिट्टी को 1 घंटे हिलाकर 18 घंटे तक सम्पर्क में रहने दिया गया । दूसरे दिन बुकनर कीप के ऊपर ह्वाटमन न० 42 छानक पत्र लगाकर एवं निर्वात प्रयुक्त करके मिट्टी को विलयन से पृथक किया गया । इस प्रकार से प्राप्त पूर्ण छनित में विलेय मैंगनीज की मात्रा उपर्यक्त विधि से ज्ञात की गई । बुकनर कीप के ऊपर बची हुई मिट्टी में विनिमेय एवं अपचेय मैंगनीज की मात्रायें ऊपर दी गई विधि से ज्ञात की गईं ।

(२) **कापर सल्फेट** का प्रभाव देखन के लिए फेरस सल्फेट की ही भाँति इसको भी 200 से 1000 ppm Cu^{++} के हिसाब से 5 ग्राम मिट्टी में डाला गया। जल विलेय, विनिमेय एवं अपचेय मैंगनीज की मात्रायें पहले की भाँति ज्ञात की गईं।

(३) मोनो-कैल्सियम फास्फेट को भी 200 से 1000 ppm P के अनुसार 5 ग्राम मिट्टी में डालकर उपर्युक्त विधि से मैंगनीज के प्रकारों पर कैल्सियम फास्फेट का प्रभाव ज्ञात किया गया।

(४) **अमोनियम साइट्रेट** का प्रभाव ज्ञात करने के लिये उपर्युक्त ढंग से 250 से 1000 ppm साइट्रेट डाला गया एवं जल विलेय, विनिमेय तथा अपचेय मैंगनीज की मात्रायें ज्ञात की गईं।

(५) **कैल्सियम कार्बोनेट** का मिट्टी में मैंगनीज के प्रकारों पर प्रभाव देखने के लिये 1 से 4% कैल्सियम कार्बोनेट 5 ग्राम मिट्टी में मिलाया गया। इसमें 50 मिली० आसुत जल मिलाकर पहले की ही तरह हिलाया गया एवं 18 घंटे बाद छाना गया। जल विलेय, विनिमेय एवं अपचेय मैंगनीज की मात्राएँ पहले की ही तरह ज्ञात की गईं।

(६) **संतृप्तता एवं असंतृप्तता** के प्रभाव का अध्ययन करने के लिये मल मिट्टियों से हाइड्रोजन, कैल्सियम, मैगनीशियम एवं पोटैशियम (H-Soil, Ca-Soil, Mg-Soil ad K-Soil) मिट्टियाँ तैयार की गईं। इसके लिए क्रमशः $N/10$ हाइड्रोक्लोरिक अम्ल, कैल्सियम क्लोराइड, मैगनीशियम क्लोराइड एवं पोटैशियम क्लोराइड के नार्मल विलयन (N) से मूल मिट्टियों को बारम्बार धोया गया और इनमें उपर्यक्त विधि से मैंगनीज की मात्राय ज्ञात की गईं।

सारणी 1

प्रयुक्त मिट्टियों के कतिपय रासायनिक अवयव

मिट्टियाँ	सेस्क्वी आक्साइड %	कैल्सियम कार्बोनेट %	कार्बनिक कार्बन %	धनायन विनिमेय क्षमता me/100 ग्राम मिट्टी	पी-एच०	मैंगनीज (ppm)			विनिमेय × 100 / पूर्ण	अपचेय × 100 / पूर्ण
						पूर्ण	विनिमेय	अपचेय		
काली मिट्टी	16·725	1·75	0·52	39·5	8·0	900	10	198	1·1	22
लाल मिट्टी	5·300	0·875	0 76	24·0	6·4	250	55	56	22	22·4

(७) **कार्बनिक पदार्थ** के प्रभाव का अध्ययन करन के लिए मिट्टियों के साथ 2% ग्लूकोस मिलाकर रख दिया गया। इसको बारी-बारी से सुखाया एवं नम किय गया। इसमें मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों का विश्लेषण 30, 90, 180 दिनों के अन्तर पर किया गया। ग्लूकोस की ही भाँति 4% फेरस सल्फेट का भी प्रभाव इन्हीं अवधियों पर ज्ञात किया गया।

परिणाम एवं विवेचना

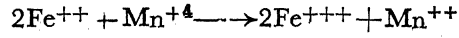
फेरस सल्फेट का प्रभाव—सारणी 2 में दिये गये परिणामों के सूक्ष्म विश्लेषण से यह ज्ञात होता है कि काली मिट्टी में जैसे-जैसे फेरस सल्फेट की मात्रा बढ़ाई जाती है जल विलेय तथा विनिमेय मैंगनीज की मात्रा

सारणी 2

मैंगनीज के प्रकारों पर फेरस सल्फेट का प्रभाव

	मैंगनीज के प्रकार (ppm)			
Fe^{++} की मिलायी गयी मात्रा (ppm)	जल विलेय (1)	विनिमय (2)	अपचेय (3)	सक्रिय (1+2+3)
काली मिट्टी				
0	—	10	198	208
100	—	10	193	203
200	5	10	188	203
400	11	14	178	203
600	13	45	150	208
800	16	59	137	212
1000	21	75	120	216
लाल मिट्टी				
0	—	55	56	111
100	6	66	34	106
200	15	74	25	114
400	30	79	14	123
600	40	72	11	123
800	52	64	11	126
1000	62	59	11	132

बढ़ती जाती है जब कि लाल मिट्टी में विनिमेय मगनीज 400 ppm Fe^{++} तक बढ़ने के बाद घटती दिखाई पड़ती है। अपचेय मैंगनीज की मात्रा दोनों मिट्टियों में फेरस सल्फेट की मात्रा के बढ़ने के साथ घटती है। यह भी देखा गया है कि सक्रिय मैंगनीज की मात्रा फेरस सल्फेट डालने से बढ़ती है। इससे यह ज्ञात होता है कि Fe^{++} आयन मैंगनीज के उच्च आक्साइडों का अपचयन करके सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि करते हैं एवं स्वयं Fe^{+++} में उपचित हो जाते हैं।

$$2Fe^{++} + Mn^{+4} \longrightarrow 2Fe^{+++} + Mn^{++}$$

सारणी 3

मैंगनीज के प्रकारों पर कापर सल्फेट का प्रभाव

Cu^{++}की मिलायी गयी मात्रा (*ppm*)	मैंगनीज के प्रकार (ppm)			
	जल विलेय 1	विनिमय 2	अपचेय 3	सक्रिय (1+2+3)
काली मिट्टी				
0	—	10	198	208
200	8	14	188	210
400	20	14	178	212
600	36	14	162	212
800	48	12	154	214
1000	64	14	142	220
लाल मिट्टी				
0	—	55	56	111
200	18	44	50	112
400	46	24	42	112
600	58	20	36	114
800	75	15	24	114
1000	102	2	20	124

यह परिणाम बोकेन[1] द्वारा प्राप्त परिणाम के समान है जिसमें उन्होंने देखा कि फेरस सल्फट तथा हाइड्रोक्विनोन द्वारा अपचेय मैंगनीज की समान मात्रायें निकलती हैं।

लाल मिट्टी में फेरस सल्फेट के अधिक बढ़ाने पर विनिमेय मैंगनीज का घटना यह बताता है कि अधिक Fe^{++} डाल देने पर मैंगनीज विनिमयशील अवस्था में न जाकर के जल विलेय अवस्था में चला जाता है।

कापर सल्फेट का प्रभाव—सारणी 3 में दिये गये परिणामों से यह विदित होता है कि कापर सल्फेट डालने से जल विलेय मैंगनीज की मात्रा दोनों मिट्टियों में बढ़ती है। काली मिट्टी में विनिमेय मैंगनीज प्रभा-

सारणी 4

मैंगनीज के प्रकारों पर मोनो कैल्सियम फास्फेट का प्रभाव

P की मिलाई गई मात्रा (*ppm*)	मैंगनीज के प्रकार (ppm) जल विलेय 1	विनिमेय 2	अपचेय 3	सक्रिय 1+2+3
काली मिट्टी				
0	—	10	198	208
200	7	16	187	210
400	10	16	185	211
600	18	15	178	211
800	18	17	178	213
1000	26	15	170	211
लाल मिट्टी				
0	—	55	56	111
200	15	40	56	111
400	29	28	54	111
600	46	14	52	112
800	58	12	44	114
1000	69	12	36	116

वित नहीं होता जब कि लाल मिट्टी में कापर सल्फेट बढ़ान के साथ-साथ घटता है। अपचेय मैंगनीज की मात्रा दोनों मिट्टियों में फेरस सल्फेट की ही भांति कापर सल्फेट की मात्रा बढ़ाने के साथ घटती जाती है। सक्रिय मैंगनीज की मात्रा भो कापर सल्फेट की मात्रा के साथ बढ़ती जाती है।

कापर सल्फेट परिवर्तनशील संयोजकता वाले समूह का सदस्य है अतः इसकी उपस्थिति में मैंगनीज के उच्च आक्साइडों का बनना रुक जाता है। लीपर[4] के अनुसार कापर सल्फेट, मैंगनीज के उच्च आक्साइडों को विलेय बनाता है परन्तु ऐसा क्यों होता है इसका कारण अज्ञात है। अतः जैसा कि परिणामों से विदित होता है कापर सल्फेट अपचय मैंगनीज को विलेय बनाकर जल विलेय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि करता है। यह भी सम्भव है कि कापर, कार्बनिक जटिल में से कुछ मैंगनीज निष्कासित करता हो जैसा कि हाइन्टजे एवं मान[12] का कथन है।

मोनो कैल्सियम फास्फेट का प्रभावः—सारणी 4 में प्रस्तुत परिणामों से यह स्पष्ट है कि मिट्टी में कल्सियम फास्फेट डालने से जल विलेय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। यह वृद्धि काली मिट्टी में अपचेय

सारणी 5

मैंगनीज के प्रकारों पर अमोनियम साइट्रेट का प्रभाव

साइट्रेट की डाली गयी मात्रा (*ppm*)	मैंगनीज के प्रकार (ppm)			
	जल विलेय 1	विनिमेय 2	अपचेय 3	सक्रिय (1+2+3)
काली मिट्टी				
0	—	10	198	208
100	8	14	186	208
250	10	14	180	204
500	18	27	162	207
1000	22	42	148	212
लाल मिट्टी				
0	—	55	56	111
100	8	52	53	113
250	15	64	40	119
500	17	68	40	125
1000	22	74	34	130

मैंगनीज के घटने के कारण एवं लाल मिट्टी में विनिमेय एवं अपचेय मैंगनीज़ दोनों मैंगनीज़ के घटने के कारण होती है। सक्रिय मैंगनीज में बहुत थोड़ी वृद्धि होती है ।

जैसा कि ज्ञात है मिट्टी में फास्फेट डालने से प्राप्य मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। कुछ वैज्ञानिकों का मत है कि प्राप्य मैंगनीज की वृद्धि फास्फेट द्वारा मिट्टी में उत्पन्न की गई अम्लता के कारण होती है। यही कारण है कि फास्फेट डालने से अपचेय मैंगनीज विलेय होकर जल विलेय मैंगनीज की मात्रा में वद्धि करता है एवं अपचेय मैंगनीज घटता है। लाल मिट्टी में विनिमयशील मैंगनीज का घटना कैल्सियम एवं मैंगनीज में प्रतिद्वंदिता के कारण है।

अमोनियम साइट्रेट का प्रभाव :—सारणी 5 के सूक्ष्म विश्लेषण से यह विदित होता है कि मिट्टी में अमोनियम साइट्रेट डालने से जल विलेय, विनिमेय एवं सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। अपचेय मैंगनीज की मात्रा अमोनियम साइट्रेट के बढ़ने के साथ घटती जाती है ।

सारणी 6

मैंगनीज के प्रकारों पर कैल्सियम कार्बोनेट का प्रभाव

$CaCO_3$ की डाली गयी मात्रा %	मैंगनीज के प्रकार (ppm)			
	जल विलेय 1	विनिमेय 2	अपचेय 3	सक्रिय 1+2+3
काली मिट्टी				
0	—	10	198	208
1	—	10	192	202
2	—	6	194	200
3	—	6	192	198
4	—	2	188	190
लाल मिट्टी				
0	—	55	56	111
1	4	50	54	108
2	—	44	58	102
3	—	40	58	98
4	—	28	68	96

परिणामों से यह भी विदित होता है कि साइट्रेट आयन मिट्टी में अपचायक स्थिति पैदा करते हैं जिसके कारण अपचेय मैंगनीज में कमी आ जाती है एवं इस प्रकार जो मैंगनीज अपचित होकर विलेय अवस्था में आता है या तो विनिमेय-जटिल में स्थान ले लेता है या फिर जल विलेय मैंगनीज के रूप में दिखलाई पड़ता है। सक्रिय मैंगनीज में वृद्धि से यह ज्ञात होता है कि साइट्रेट के द्वारा अपचेय उच्च आक्साइडों के अतिरिक्त भी कुछ मैंगनीज विलेय होता है अन्यथा सक्रिय मैंगनीज के बढ़ने का कोई प्रश्न ही नहीं उठता। ब्रामफील्ड[13] ने यह घोषित किया है कि साइट्रेट, टार्टरेट एवं E.D.T.A. मैंगनीज डाई आक्साइड एवं अन्य उच्च आक्साइडों को विलेय अवस्था में ला सकते हैं।

कैल्सियम कार्बोनेट का प्रभाव :—सारणी 6 में दिये गये परिणामों से यह ज्ञात होता है कि कैल्सियम कार्बोनेट डालने से विनिमेय मैंगनीज कम हो जाता है। काली मिट्टी में अपचेय मैंगनीज कैल्सियम कार्बोनेट की उपस्थिति में किसी ऐसे यौगिक को जन्म देता है जो कि सक्रिय मैंगनीज के रूप में नहीं रह जाता।

सारणी 7

मैंगनीज के प्रकारों पर संतृप्तता एवं असंतृप्तता का प्रभाव

मिट्टियाँ	मैंगनीज के प्रकार (ppm)			
	जल विलेय 1	विनिमेय 2	अपचेय 3	सक्रिय 1+2+3
काली मिट्टी				
मूल रूप	—	10	198	208
H-Soil	—	—	—	—
Ca-Soil	—	—	184	184
Mg-Soil	—	—	185	185
K-Soil	—	—	206	206
लाल मिट्टी				
मूल रूप	—	55	56	111
H-Soil	—	—	—	—
Ca-Soil	—	—	40	40
Mg-Soil	—	—	40	40
K-Soil	—	—	48	48

लाल मिट्टी में विनिमेय मैंगनीज घटता है जब कि अपचेय मैंगनीज में वृद्धि होती है। परन्तु अपचेय मैंगनीज में उतनी वृद्धि नहीं होती जितनी कि विनिमेय मैंगनीज में घटती होती है यही कारण है कि सक्रिय मैंगनीज की मात्रा घटती है।

कैल्सियम कार्बोनेट क्षारीय है (पी-एच० 8·2)। जब यह मिट्टी में डाला जाता है तो यह मैंगनीज को अप्राप्य बना सकता है। क्षारीय होने के कारण यह मैंगनीज को उच्च संयोजकता तक उपचित होने में सहायक होता है। ब्वायशाट एवं डुरो[15] ने यह बताया है कि मैंगनीज की अप्राप्यता पी-एच० 8·0 के ऊपर बढ़ती जाती है। क्रिस्टेन्सन, टाथ एवं बियर[16] ने भी इसी तरह के परिणाम प्राप्त किये है।

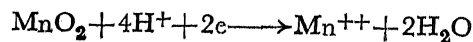
संतृप्तता एवं असंतृप्तता का प्रभावः—सारणी 7 में दिये गये परिणामों से यह स्पष्ट है कि मिट्टी को हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से धोने पर (असंतृप्त मिट्टी) विनिमेय एवं अपचेय दोनों प्रकार के मैंगनीज विनिमेय एवं अपचित होकर निकल जाते हैं। अन्य संतृप्त मिट्टियों में विनिमेय मैंगनीज तो पूरा निकल जाता है परन्तु अपचेय मैंगनीज का बहुत थोड़ा भाग ही घुल कर निकलता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि इन मिट्टियों में अपचेय मैंगनीज ही सक्रिय मैंगनीज को प्रदर्शित करता है।

विनिमेय मैंगनीज का पूरा पूरा निकल जाना बात को निश्चित करता है कि डाले गये आयन की मात्रा अधिक होने के कारण विनिमेय जटिल से विनिमय प्रक्रम द्वारा मैंगनीज विलयन में आकर छनित में निकल जाता है और विनिमय जटिल में डाले गये आयन स्थान ग्रहण कर लेते हैं। असंतृप्त मिट्टी (H-Soil) में मैंगनीज का न पाया जाना यह बताता है कि यदि अम्लीय मिट्टी में जल निकास की अच्छी सुविधा हो तो मिट्टी के मैंगनीज का बहुत सा भाग धुलकर निकल जावेगा।

कार्बनिक पदार्थ एवं फेरस सल्फेट का प्रभाव :—कार्बनिक पदार्थ (2 प्रतिशत), ग्लूकोस एवं फेरस सल्फेट (4 प्रतिशत $FeSO_4$) को मिट्टी में मिलाकर दीर्घ अवधि के लिये रख दिया गया। मिट्टी को क्रम से शुष्कार्द्र किया गया। मैंगनीज के लिये इस मिट्टी का विश्लेषण 30, 90 एवं 180 दिनों के अनन्तर किया गया। परिणाम सारणी 8 में अंकित किये गये हैं।

परिणामों से यह विदित होता है कि ग्लूकोस को मिट्टी में डालने पर अपचेय मैंगनीज में कमी एवं विनिमेय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। यह क्रिया 180 दिन तक चलती दिखाई पड़ती है। विलेय बनाये गये मैंगनीज का कुछ भाग जल विलेय रूप में भी परिलक्षित होता है। सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में भी वृद्धि दृष्टिगोचर होती है।

जब मिट्टी में ग्लूकोस मिलाया जाता है तो यह धीरे धीरे उपचित होता है एव बहुत से कार्बनिक अम्लों को जन्म देता है—जसे साइट्रिक, टार्टरिक, मैलिक, आक्सैलिक अम्ल इत्यादि। साइट्रेट के प्रभाव का अध्ययन पीछे दिया जा चुका है। ये अम्ल मिट्टी के पी-एच० को कम कर देते हैं जिससे द्विसंयोजक मैंगनीज विलयन में आ जाता है।

$$MnO_2 + 4H^+ + 2e \longrightarrow Mn^{++} + 2H_2O$$

इस प्रकार विलेय अवस्था में लाया गया मैंगनीज विनिमेय जटिल में चला जाता है। कुछ मैंगनीज जल विलेय अवस्था में भी उपस्थित रहता है। क्रिस्टेन्सन, टाथ एवं बियर[16] ने यह बतलाया कि ग्लूकोस मैंगनीज के उच्च आक्साइडों को विलेय बनाने में सहायक होता है एवं इसकी उपस्थिति में विनिमय मैंगनीज की मात्रा में वद्धि होती है।

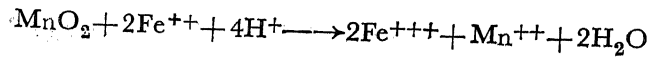
फेरस सल्फेट डालने का प्रभाव पहले देखा जा चुका है। सारणी 8 को देखने से ज्ञात होता है कि अपचेय मैंगनीज की मात्रा फेरस सल्फेट की उपस्थिति में कम है। विनिमेय मैंगनीज काली मिट्टी में 30 दिन तक बढ़न के बाद घटता दिखाई पड़ता है जबकि लाल मिट्टी में विनिमेय मैंगनीज घटता जाता है। जल विलेय मैंगनीज दोनों मिट्टियों में समय के साथ समान रूप से बढ़ता जाता है।

मिट्टी में फेरस सल्फेट उप-अपचय प्रक्रम में सहायक होता है जिसके कारण मैंगनीज के उच्च आक्साइड अपचित होकर विलेय अवस्था में आ जाते हैं।

सारणी 8

मैंगनीज के प्रकारों पर ग्लकोस एवं फेरस सल्फेट का प्रभाव

उपचार	मैंगनीज के प्रकार (ppm)									सक्रिय मैंगनीज (ppm)		
	जल विलेय			विनिमेय			अपचेय					
	30 दिन बाद	90 दिन बाद	180 दिन बाद	30 दिन बाद	90 दिन बाद	180 दिन बाद	30 दिन बाद	90 दिन बाद	180 दिन बाद	30 दिन बाद	90 दिन बाद	180 दिन बाद
काली मिट्टी												
0	—	—	—	10	10	10	198	198	198	208	208	208
ग्लकोस 2%	—	8	8	92	98	98	116	112	108	208	222	216
फेरस सल्फेट (4%)	36	48	84	69	66	42	124	120	114	229	234	240
लाल मिट्टी												
0	—	—	—	55	55	55	56	56	56	111	111	111
ग्लूकोस 2%	12	16	28	64	76	88	42	30	12	118	122	128
फेरस सल्फेट (4%)	46	56	68	35	28	24	38	44	36	119	128	128

$$MnO_2 + 2Fe^{++} + 4H^{+} \longrightarrow 2Fe^{+++} + Mn^{++} + 2H_2O$$

फेरस आयन का विनिमय प्रक्रम में भाग लेने के कारण मैंगनीज विनिमय जटिल में कम ही प्रवेश कर पाता है। यही कारण है कि परिणाम में विनिमेय मैंगनीज की मात्रा कम पाई जाती है।

सक्रिय मैंगनीज में वृद्धि यह दर्शाती है कि कुछ और मैंगनीज जो कि सक्रिय रूप में नहीं था फेरस सल्फेट की उपस्थिति में सक्रिय रूप में आ जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि यदि मिट्टी में अपचायक स्थिति उत्पन्न कर दी जाय तो बहुत सा मैंगनीज जो कि पौधों को अप्राप्य था प्राप्य हो जायगा एवं क्षारीय स्थिति तथा चूना की उपस्थिति में मैंगनीज की सक्रियता पर उल्टा प्रभाव पड़ेगा।

निर्देश

1. बोकेन ई०। **प्लान्ट एन्ड सायल,** 1956, **7**(3), 237-252.
2. पेज, ई० आर०। **प्लान्ट एन्ड सायल,** 1962, **17**(1), 99-108.
3. हाइन्टजे, एस० जी० तथा मान, पी० जे० जी०। **जर्न० एग्री० साइंस,** 1949, **39,** 80-95.
4. लीपर, जी० डब्ल्यू० तथा पसियोरा, जे० बी०। **एग्रोकेमिका,** 1963, **8**(1), 81-90.
5. र्यूथर, डब्ल्यू०, गार्डनर, एफ० ई०, स्मिथ, पी० एफ० तथा राथ, डब्ल्यू० आर०। **प्रोसी० अमे० सोसा० हार्टी० साइंस,** 1949, **53,** 71-84.
6. मारिस, एच० डी०। **सायल साइंस सोसा० अमे० प्रोसी०,** 1948, **13,** 363-371.
7. रोज, टी० एच० तथा डरमाट, डब्ल्यू०। **इम्पायर जर्न० इक्सपेरिमेन्टल एग्री०,** 1962, **30,** 263-275.
3. लारसन, एस०। **बुल० डाक० इन्टने० सुपरफास० मैनूफै० एसो०,** 1956, **20,** 96-99.
9. स्पेन्सर, डब्ल्य० एफ०। **सायल साइंस,** 1960, **89,** 311-317.
10. लैम्ब, जे० जी० डी०। **आइरिश जर्न० एग्री० रिसर्च,** 1962, **1,** 17-20.
11. सोहन्जन, एन० एल०। **जेन्त्र० बैक्टीरियल० पैरासाइटेन्क०,** II, 1914, **40,** 545-554.

12. हाइन्टजे, एस० जी० तथा मान, पी० जे० जी० । **नेचर,** 1947, **158,** 791.

13. ब्रामफील्ड, एस० एम० । **प्लान्ट एन्ड सायल,** 1957, **8,** 389-394.

14. जैक्सन, एम० एल० । Soil Chemical Analysis, **एशिया पब्लिशिंग हाउस, प्रथम संस्करण,** 1962, पृ० 393-396.

15. ब्वायशाट, पी०, डरो, एम० तथा सिलवेस्त्र, जी० । **एनल० एग्रोनामिक०,** 1950, **3,** 1-9.

16. क्रिस्टन्सन, पी० डी०, टाथ, एस० जे० तथा बियर, एफ० ई० । **सायल साइंस सोसा० अमे० प्रोसी०,** 1950, **15,** 279-282.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 161-166

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 161-166

मध्य प्रदेश की मिट्टियों में पूर्ण और प्राप्य नाइट्रोजन

केशवाचार्य मिश्र तथा पी० एम० तम्बोली

कृषि रसायन विभाग, जवाहरलाल नेहरू कृषि विश्वविद्यालय, जबलपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 1, 1967]

सारांश

मध्य प्रदेश की मिट्टियों में पूर्ण नाइट्रोजन का कितना अंश प्राप्य है, इसका पता लगाने के लिये 45 नमूने मिट्टी के भिन्न प्रान्तों से इकट्ठे किये गये। इन नमूनों में पी-एच०, आर्गनिक कार्बन, पूर्ण नाइट्रोजन जेलडाल विधि से, एवं प्राप्य नाइट्रोजन 'क्षारीय पोटैशियम परमैंगनेट' विधि से निकाला गया। मिट्टी का यांत्रिक विश्लेषण भी किया गया। अध्ययन के फलस्वरूप यह देखा गया है कि मिट्टी के गठन पर प्राप्य नाइट्रोजन की मात्रा निर्भर करती है। बलुही, दुमट तथा चिकनी मिट्टी में प्राप्य नाइट्रोजन की मात्रा पूर्ण नाइट्रोजन की क्रमशः 74·5%, 6% तथा 7·2% पाई गई।

Abstract

Status of total and available nitrogen in soils of Madhya Pradesh. *By* K. C. Mishra and P. M. Tamboli, Agricultural Chemistry Department, Jawaharlal Nehru Agricultural University, Jabalpur (M.P.).

For study of available nitrogen of the total nitrogen present in soils, 45 soil samples from different parts of Madhya Pradesh were collected. pH, organic carbon, total nitrogen (by K Jeldahl's method) and available nitrogen by alkaline potassium permanganate method was estimated. Mechanical analysis of soils was also done. Results indicate that amount of available nitrogen depends upon texture of the soil. It was found that sand, loam and clay contain 74·5%, 6% and 7·2% available nitrogen of total nitrogen.

हैम्बिज[1], गोरिंग और क्लार्क[2] ने यह निर्णय किया कि नाइट्रोजन पौधों की वृद्धि के लिये एक आवश्यक तत्व है। मिट्टी में इसकी मात्रा जलवायु के साथ ही साथ जैविक एवं भौतिक क्रियाओं पर निर्भर करती है। मुख्यतया जोती हुई मिट्टी में 0·002 से 0·04% नाइट्रोजन पाया जाता है।

सेयर[4], योकिन[5] इत्यादि ने नाइट्रोजन के महत्व पर प्रकाश डाला है और यह निष्कर्ष निकाला है कि अच्छी फसल प्राप्त करने के लिए नाइट्रोजन का होना अत्यन्त आवश्यक है। यह सभी जीवित पदार्थों का मुख्य

तत्व होने के साथ ही साथ प्रोटीन और क्लोरोफिल का भी आवश्यक अंग है। नाइट्रोजन पौधों में गहरा हरा रंग प्रदान करने के अलावा कोशाओं की वृद्धि में हाथ बटाता है जिससे पत्ते और तने में वृद्धि होती है (यावलकर और अग्रवाल[6])। मिट्टी में नाइट्रोजन कार्बनिक पदार्थ के साथ पाया जाता है जो जीवाणु, फफंद, यीस्ट ऐन्जाइमों द्वारा प्राप्य नाइट्रोजन में बदला जाता है (रसल[7])।

प्राप्य नाइट्रोजन के तीन प्रकार ज्ञात हैं (1) कठिनाई से प्राप्य या कम प्राप्य नाइट्रोजन (2) मध्यम प्राप्य (3) शीघ्र प्राप्य (readily avilable)। कोलीशन और मेनसिंग[8] ने देखा है कि 99% पूर्ण नाइट्रोजन शीघ्र प्राप्य नाइट्रोजन में परिवर्तित हो जाता है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन में प्रयुक्त मिट्टियों के नमनों को विभिन्न क्षेत्रों से लाकर उन्ह सुखाकर, पीसकर एवं चालकर फिर ऊष्मक में सुखा करके स्वच्छ काँच की बोतलों में संग्रहीत किया गया। इन मिट्टियों का भौतिक विश्लेषण 'अन्तर्राष्ट्रीय पिपेट' विधि से किया गया। बाद में पी-एच०, कार्बनिक कार्बन, पूर्ण नाइट्रोजन एवं प्राप्य नाइ-ट्रोजन निकाला गया। कार्बनिक कार्बन वाकले और ब्लैक[9] विधि से, पूर्ण नाइट्रोजन 'जेलडाल विधि से' एवं प्राप्य नाइट्रोजन 'क्षारीय पोटैशियम परमैंगनेट' विधि से निकाला गया[10]।

प्राप्य आँकड़े सारिणी 1-3 में दिये गये हैं।

सारणी 1

बलुही मिट्टियाँ

क्रमांक	पी-एच०	%कार्बनिक कार्बन		%पूर्ण नाइट्रोजन	%प्राप्य नाइट्रोजन
1	5·8	0·900		0·112	0·014
2	6·2	1·125		0·147	0·009
3	6·7	0·990		0·084	0·012
4	6·4	1·230		0·131	0·016
5	7·8	0·870		0·140	0·017
6	6.1	0·600		0·089	0·014
7	7·6	0·880		0·199	0·018
8	6·7	0·720		0·098	0·016
9	6·7	0·540		0·043	0·006
			औसत	0·116	0·014

सारणी 2

दुमट मिट्टियाँ

क्रमांक	पी-एच०	कार्बनिक कार्बन%	पूण नाइट्रोजन%	प्राप्य नाइट्रोजन%
1	7·8	1·140	0·075	0·011
2	7·7	1·095	0·172	0·012
3	6·0	1·005	0·102	0·022
4	5·7	1·305	0·105	0·019
5	5·8	1·080	0·061	0·016
6	7·5	1·170	0·064	0·013
7	5·5	1·215	0·135	0·024
8	5·1	0·975	0·074	0·015
9	7·8	1·020	0·089	0·014
10	5·1	1·140	0·095	0·020
11	6·0	0·900	0·089	0·026
12	6·1	0·855	0·079	0·020
13	5·6	0·735	0·079	0·018
14	6·2	0·585	0·015	0·015
15	7·8	0·900	0·142	0·015
16	6·7	1·065	0·192	0·017
17	6·0	0·540	0·046	0·020
18	8·0	0·615	0·074	0·013
19	6·4	0·735	0·081	0·013
20	6.5	0.690	0.070	0.013
		औसत	0.096	0.017

सारणी 3

चिकनी मिट्टियाँ

क्रमांक	पी-एच	कार्बनिक कार्बन %	पूर्ण नाइट्रोजन %	प्राप्य नाइट्रोजन %
1	7·8	1·065	0·098	0·012
2	6·9	0.990	0·091	0·012
3	8·0	0·900	0·070	0·009
4	8·1	1·200	0·140	0·011
5	8·2	1·245	0·133	0·017
6	8·5	1·260	0·140	0·018
7	9·8	0·990	0·072	0·017
8	7·6	1·005	0·096	0·014
9	7·7	1·170	0·115	0·023
10	7·3	1·305	0·102	0·018
11	7·0	1·275	0·154	0·018
12	7·2	0·990	0·112	0·015
13	7·1	1·245	0·104	0·016
14	7·5	0·570	0·102	0·016
15	7·5	0·795	0·117	0·012
16	7·3	0·690	0·090	0·012
		औसत	0·108	0·015

परिणाम और विवेचना

बलुही मिट्टी में समान पी-एच० और कार्बनिक कार्बन की मात्रा में पूर्ण नाइट्रोजन की औसतन मात्रा 1·043% एवं प्राप्य नाइट्रोजन की 0·014 है (सारिणी 1)। इससे यह सिद्ध होता है कि उक्त मिट्टी प्रकारों में पूर्ण नाइट्रोजन का 74·5% प्राप्य नाइट्रोजन है।

सारिणी 2 से यह निष्कर्ष निकलता है कि दुमट मिट्टियों में (पी-एच० 5·1—8·0), कार्बनिक कार्बन 0·540—1·305% और पूर्ण और प्राप्य नाइट्रोजन की औसत मात्रा क्रमशः 0·096% तथा 0·017% है। इस प्रकार इस मिट्टी में पूर्ण नाइट्रोजन का 6% ही प्राप्य नाइट्रोजन है, जो पौधों की वृद्धि के लिये उपलब्ध हो सकता है।

पी-एच० 6·9—8·5 तथा कार्बनिक कार्बन 0·570%—1·305% वाली चिकनी मिट्टियों के समूह में पूर्ण नाइट्रोजन की औसत मात्रा 0·108% और प्राप्य नाइट्रोजन की 0·015% है। इससे ज्ञात होता है कि चिकनी मिट्टियों में पूर्ण नाइट्रोजन का 7·2% ही प्राप्य है।

इन सारिणियों से यह भी पता चलता है कि जब मिट्टियों का पी-एच० 5·1 से 8·5 के बीच में घटता-बढ़ता है तो उसके साथ पूर्ण और प्राप्य नाइट्रोजन में भी घटी-बढ़ी होती है। फलतः पी-एच० एवं नाइट्रोजन के प्रकार में महत्वपूण संबंध है। किन्तु इसके विपरीत पूर्ण कार्बन एवं पूर्ण और प्राप्य नाइट्रोजन में किसी प्रकार का संबंध नहीं देखा जाता। इस प्रकार कार्बनिक कार्बन की मात्रा के द्वारा मध्य प्रदेश की मिट्टियों की नाइट्रोजन मात्रा का कोई अनुमान नहीं लगाया जा सकता।

उक्त सारिणियों से मिट्टी के गठन (texture of the soil) एवं पूर्ण और प्राप्य नाइट्रोजन में महत्वपूर्ण संबंध देखा जाता है। बलुही मिट्टियों में पूर्ण नाइट्रोजन का 74·5%, दुमट मिट्टी में 6% और चिकनी मिट्टी में 7·2% प्राप्य नाइट्रोजन (avilable nitrogen) मिलता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० शिव गोपाल मिश्र, डा० माधुरी मोहन राय एवं श्री वीरेन्द्र कुमार मिश्र का हार्दिक आभार प्रकट करता है।

निर्देश

1. हैम्बिज (सम्पादक)। "Hunger signs in crops" 1941.
2. गोरिंग, सी० ए० आई० तथा फ्रैन्सिस, ई० क्लार्क। **सॉयल साइन्स सोसा० अमेरिका प्रोसी०**, 1949, **17**, 365-368.
3. जेनी, हैन्स। "Factors of Soil Formation" **मैग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क** 1941.
4. सेयर, सी० बी० तथा वीतम, एम० टी०। "Effect of different sources of fertilizer nutrient" 1952.
5. योकिन, एस० जी०, हेस्टर, जी० बी० तथा होडले, ए० डी०। **अमे० सोसा० हार्टि० साइ० प्रोसी०**, 1950, **55,** 379-383.

6. यावलकर, के० एम० तथा अग्रवाल, जे० पी०। — Manures and fertilizers I.C.A.R. 1962.

7. रसेल, ई० डब्ल्य। — "Soil conditions and Plant growth" 1950.

8. कोलीशन, आर० सी० तथा मेनसिंग, जे० ई०। — **न्यूयार्क स्टेट एग्रि० एक्सपे० स्टे० टेक० बलेटिन** 166.

9. वाकले, ए० तथा ब्लैक, आई० ए०। — **सॉयल साइन्स**, 1939, **37**, 29-38.

10. सुबैया, बी० वी० तथा असिजा, जे० एल०। — **करेन्ट साइन्स**, 1956, **86**, 208-215.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10,** 167-173

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10,** 167-173

मध्य प्रदेश की मिट्टियों में तांबे की मात्रा एवं उपलब्ध तांबे की न्यूनता वाले क्षेत्रों का सीमा निर्धारण

महेश कुमार मिश्र एवं माधुरी मोहन राय

रसायन विभाग, जवाहरलाल नेहरू कृषि विश्वविद्यालय,
जबलपुर

[प्राप्त—मई 1, 1967]

सारांश

मध्य प्रदेश के 17 जिलों की मिट्टियों में कुल तांबे (total copper) एवं उपलब्ध तांबे (available copper) की मात्रा का अध्ययन किया गया। एकत्रित मिट्टियाँ 5 भूमि प्रकार के अंतर्गत आती हैं। हेनरिक्सन[1] द्वारा प्रस्तावित 1ppm उपलब्ध तांबे की मात्रा को भूमि में तांबे की न्यूनतम सीमा मानकर न्यूनता वाले क्षेत्रों का सीमा निर्धारण किया।

Abstract

A study of copper—the distribution and demarcation of areas deficient in avilable copper in soils of Madhya Pradesh. *By* M. K. Mishra & M. M. Rai, Chemistry Department, Jawahar Lal Nehru Krishi Vishwavidylaya, Jabalpur (M.P.).

The copper status of soils of Madhya Pradesh from 17 districts representing 5 soil types was studied. The soil samples were analysed for total and available copper contents, and copper deficiency limit was established as suggested by Henriksen (1957).

'मुख्य तत्व' (Major elements) एवं 'सूक्ष्ममात्रिक तत्व' (Micro elements), दोनों ही पौधों की वृद्धि के लिए महत्वपूर्ण हैं। किसी भी एक तत्व की कमी पौधों की वृद्धि में बाधक हो सकती है। इसके अतिरिक्त जब मुख्य तत्व अधिक मात्रा में उपयोग किये जाते हैं तो उसी अनुपात में सूक्ष्म तत्वों की भी आवश्यकता बढ़ती जाती है। जैसे-जैसे मुख्य तत्व का उपयोग बढ़ता जा रहा है, यह आवश्यक है कि भूमि में प्राप्त सूक्ष्म तत्वों की मात्रा, उनकी उपलब्धि एवं उनकी न्यूनता वाले क्षेत्रों का भलीभाँति ज्ञान प्राप्त हो।

पौधों के भोजन में ताँबे का कार्य बड़ा ही महत्वपूर्ण एवं जटिल है। फ्रैंक और बिन्घम[2] ने घोषित किया है कि फास्फोरस की अधिक मात्रा तांबे की न्यूनता के कारण पौधों की उचित बाढ़ में बाधक है। तांबे की न्यूनता के कारण पौधों में कई प्रकार के रोग भी पैदा हो जाते हैं, जैसे—नीबुओं में 'डाईबैक' (Dieback), सेब में 'विदर टिप' (Wither tip), चुकंदर में 'क्लोरोसिस' (Chlorosis) इत्यादि। तांबे की कमी पौधों में 'प्रकाश संश्लेषण' (photosynthesis) तथा श्वसन की क्रिया को मंद करती है। भूमि में स्थित कुछ तांबे की अधिक मात्रा, पौधों को भी अधिक मात्रा में उपलब्ध हो ही यह आवश्यक नहीं। तांबे की उपलब्धि कई स्थितियों पर निर्भर करती है।

प्रयोगात्मक

मिट्टियों के नमूनों से कुल तांबा निकालने के लिए होम्स[3] की पद्धति अपनाई गई। उपलब्ध तांबा मोरगन्स निष्कर्षक (Morgan's extractant) से निकाला गया। रंगमापी (colorimeter) द्वारा तांबे की मात्रा चेंग एवं ब्रे[4] की पद्धति से मापी गई।

एकत्रित मिट्टियों के नमूने निम्नांकित भूमि प्रकार में विभाजित किय गए—

	भूमि प्रकार	नमूनों की संख्या
1.	लाल-पीली भूमि	18
2.	मिश्रित लाल-काली भूमि	6
3.	गहरी काली भूमि	6
4.	उथली काली भूमि	6
5.	मध्यम काली भूमि	15

विवेचना

भूमि में कुल तांबे एवं उपलब्ध तांबे की मात्रायें विभिन्न जिलों की मिट्टियों में सारणी 1 में अंकित हैं।

इस सारणी से ज्ञात होता है कि सिवनी जिले की मिट्टियों में कुल तांबे की मात्रा (108·42 ppm) सर्वाधिक है किन्तु बैतूल जिले की मिट्टियों में सबसे कम (14·72 ppm) कुल तांबे की मात्रा पाई गई।

उपलब्ध तांबे की सर्वाधिक मात्रा (5·08 ppm) मंडला जिले की मिट्टियों में है जबकि रीवाँ जिले की मिट्टियों में सबसे कम उपलब्ध तांबे (0·84 ppm) की मात्रा पाई गई।

विभिन्न भूमि-प्रकारों के अनुसार उनमें प्राप्त होने वाली कुल तांबे एवं उपलब्ध तांबे की मात्रायें सारणी 2 में अंकित हैं।

सारणी 1

मध्य प्रदेश की मिट्टियों में कुल ताँबे एवं उपलब्ध तांबे की मात्रा (औसत)

जिला	नमूनों की संख्या	कुल तांबे की मात्रा (ppm)	उपलब्ध तांबा ppm
सरगुजा	3	34·00	1·67
बिलासपुर	3	29·62	1·20
रायपुर	3	42·41	2·07
दुर्ग	3	27·78	1·11
बस्तर	3	19·09	0·97
मंडला	3	104·24	5·08
सीधी	3	17·94	2·12
रीवाँ	3	24·43	0·84
जबलपुर	3	30·37	2·09
सागर	3	48·30	2·09
नरसिंह पुर	3	38·53	1·14
होशंगाबाद	3	32·67	1·85
बैतूल	3	14·72	0 94
सिवनी	3	108·42	3·97
छतरपुर	3	30·47	1·77
मन्दसौर	3	60·71	2 99
निमाड़	3	99·97	3·43

सारणी 2

भूमि-प्रकारों में कुल तांबा एवं उपलब्ध ताँबा (औसत)

क्रमांक	भूमि-प्रकार	नमूनों की संख्या	कुल तांबे की मात्रा (ppm)	उपलब्ध तांबे की मात्रा (ppm)
1	लाल-पीली भूमि	18	42·89	2·02
2	मिश्रित लाल-काली भूमि	6	29·12	0·57
3	गहरी काली भूमि	6	35·60	2·46
4	उथली काली भूमि	6	61·57	2·46
5	मध्यम काली भूमि	15	51·54	2·55

उक्त सारणी से विदित होता है कि कुल तांबे एवं उपलब्ध तांबे की मात्राएँ मिश्रित लाल-काली भूमि में सबसे कम (क्रमशः 29·12 ppm एवं 0·57 ppm) हैं जबकि कुल तांबे की सर्वाधिक मात्रा (61·57 ppm) उथली काली भूमि में एवं सर्वाधिक उपलब्ध तांबे की मात्रा (2·55 ppm) मध्यम काली भूमि में पाई गई।

कुल तांबे एवं उपलब्ध तांबे की मात्राएँ मध्य प्रदेश के विभिन्न भूमि-प्रकारों में निम्नांकित क्रमानुसार पाई गईं—

कुल ताँबा—

उथली लाली भूमि > मध्यम काली भूमि > लाल-पीली भूमि > गहरी काली भूमि > मिश्रित लाल-काली भूमि ।

उपलब्ध तांबा—

मिश्रित लाल-काली भूमि < लाल-पीली भूमि < गहरी काली भूमि एवं उथली काली भूमि < मध्यम काली भूमि ।

काली मिट्टियों में कुल तांबे की अधिक मात्रा मृत्तिका (Clay) की अधिकता से हो सकती है। अन्य कई कार्यकर्त्ताओं ने भी इस बात की पुष्टि की है कि कुल तांबे की अधिकता मिट्टी में पाई जाने वाली मृत्तिका की अधिकता के कारण होती है। नीलकांतन एवं मेहता[5] ने घोषित किया है कि जैसे-जैसे भूमियों में मृत्तिका की मात्रा बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे कुल तांबे की मात्रा बढ़ती जाती है।

कुल तांबे की मात्रा का वितरण मध्य प्रदेश की मिट्टियों में निम्न प्रकार से है :

सारणी 3

कुल तांबे की मात्रा का वितरण

परास (Range) ppm Cu	नमूनों की संख्या	कुल नमूनों का प्रतिशत
10-20	12	23·49
20-30	7	13·68
30-40	14	27·45
40-50	4	7·84
50-60	3	5·88
60-70	2	3·92
70-80	1	1·96
80-90	1	1·96
90-100	2	3·92
100-110	0	0
110-120	1	1·96
120-130	3	5·88
130-140	1	1·96

इस सारणी से ज्ञात होता है कि समस्त नमूनों के 64·62 प्रतिशत नमूनों में कुल तांबे की मात्रा 10-40 ppm के बीच है। 40 ppm से अधिक कुल तांबे की मात्रा वाले नमूनों का प्रतिशतत्व बहुत ही कम है। 40-80 ppm वाले नमूनों 19·6% हैं। 80-120 ppm वाले एवं 120 ppm वाले नमूनों का प्रतिशत क्रमशः 7·84 और 7·84 है।

उपलब्ध तांबे का वितरण मध्य प्रदेश की मिट्टियों में सारणी 4 के अनुसार होगा।

उक्त सारणी से स्पष्ट है कि अधिकतर उपलब्ध तांबे की मात्रा 1·1—2·0 ppm और क्रमशः 2·1—3·0 ppm एवं 0·01—1·0 ppm परास में ही है जो कुल नमूनों का 80·06 प्रतिशत है। कुल नमूनों

सारणी 4

उपलब्ध तांबे का वितरण

परास (Range) ppm Cu	नमूनों की संख्या	कुल नमूनों का प्रतिशत
0·0—1·0	11	21·56
1·1—2·0	17	33·00
2·1—3·0	13	25·49
3·1—4·0	5	9·80
4.1—5·0	2	3·92
5·1—6·0	1	1·96
6·1—7·0	1	1·96
7·1—8·0	1	1·96

के 9·8 प्रतिशत नमूनों में उपलब्ध तांबे की मात्रा 3·1—4 ppm परास में हैं, जबकि 9·3 प्रतिशत नमूने 4·1 से 5·0 ppm परास में हैं।

उपलब्ध तांबे की मात्रा की सीमा :

सामान्य पौधों की वृद्धि के लिए आवश्यक उपलब्ध तांबे की मात्रा 0·1 से 0·2 ppm तक होती है। परन्तु यह उस पद्धति पर भी निर्भर करता है जिसके द्वारा उपलब्ध तांबे की मात्रा मिट्टियों से निकाली जाती है। भूमि में जैवविधि (Bio-assay) से प्राप्त 1ppm या उससे कम तांबे की मात्रा निश्चय ही पौधों में इस तत्व की कमी को दर्शाती है। यद्यपि पाइपर[6] और नीलकांतन[5] ने यह घोषित किया है कि 0·5 ppm उपलब्ध तांबे की मात्रा सामान्य पौधों की बाढ़ के लये काफी है। परन्तु मुल्डर[7] ने अपने **एसपरजिलस नाइगर** (Aspergillus niger) के प्रयोग में यह सिद्ध किया है कि 2 ppm से कम तांबे की मात्रा कभी-कभी पौधों में इस तत्व की न्यूनता के लक्षण पैदा कर देती हैं। हेनरिक्सन[1] ने EDTA और हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के घोलों की तुलना **एसपरजिलस नाइगर** से की और यह दिखाया है कि EDTA घोल से प्राप्त उपलब्ध तांबे की मात्रा **एसपरजिलस नाइगर** से प्राप्त तांबे की मात्रा की 60-70% होती है। अतः हेनरिक्सन के द्वारा प्रस्तावित 1 ppm की मात्रा को ही न्यूनता सीमा मानकर प्रस्तुत अध्ययन में उपयोग किया गया है।

उपलब्ध तांबे की कमी वाले नमूने का विवरण सारणी 5 में दिया गया है।

सारणी 5

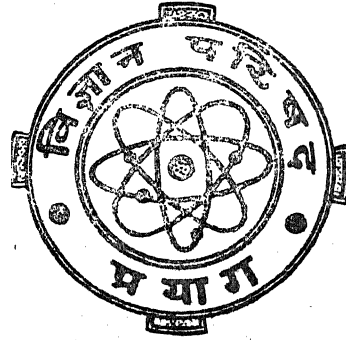
उपलब्ध तांबे की कमी वाले क्षेत्र

क्रमांक	जिला	नमूनों की संख्या	उपलब्ध तांबे की मात्रा (ppm)
1	बस्तर	1	0·83
2	बैतूल	2	0·74
3	बिलासपुर	1	0·87
4	दुर्ग	2	0·90
5	होशंगाबाद	1	0·46
6	नरसिंहपुर	2	0·65
7	रीवाँ	1	0·13

उपलब्ध तांबे की कमी मिट्टियों में कई कारण से हो सकती है। भूमि उपलब्ध तांबे की मात्रा प्रायः भूमि के पी-एच०, कार्बनिक पदार्थ की मात्रा, मृत्तिका प्रतिशत, खड़िया ($CaCO_3$) की मात्रा आदि पर निर्भर करती है।

निर्देश

1. हेनरिक्सन, ए०। नेचर, 1957 **178**, 499-500.
2. फ्रेंक, टी०, बिंघम एवं जेम्स पी० मार्टिन। **सॉयल साइं० प्रोसी अमे०**, 1956, **20**, 382-384.
3. होम्स, आर० एस०। **सॉयल साइं०** 1945. **59**, 77-84.
4. चेंग, के० एल० एवं ब्रे, आर० जे०। **अना० केमि०**, 1953, **25**, 655.
5. नीलकांतन, एवं मेहता बी० व्ही०। **सॉयल साइं०**, 1961, **91**, 251-256.
6. पाइपर, सी० एस०। **जर्न० एग्रि० साइं०**, 1942, **32**, 143-178.
7. मुल्डर, ई० जी०। **हेनरिक्सन तथा जैन्सन द्वारा उद्धृत**, 1958.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10,** 175-181

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10,** 175-181

बेसेल स्ट्रूव फलन के कतिपय पुनरावृत्ति सम्बन्ध

एल० एन० विश्वकर्मा

हरिश्चन्द्र डिग्री कालेज, वाराणसी

(डा० बृजमोहन द्वारा प्रेषित)

[प्राप्त—अप्रैल 1, 1967]

सारांश

बेसेल स्ट्रूव फलन $F_{\mu,\nu}(z)$ को $H_\mu(z)J_\nu(z)$ गुणनफल द्वारा पारिभाषित करते हुये इस फलन के कुछ पुनरावृत्ति सम्बन्ध खोज निकाले गये हैं।

Abstract

Some recurrence relations involving a Bessel-Struve function. *By* L. N. Viswakarma, Harish Chandra Degree College, Varanasi.

Defining a Bessel-Struve function $F_{\mu,\nu}(z)$ by means of a product $H_\mu\ J_\nu(z)$ some recurrence relations of this function have been obtained.

1. भूमिका : बेसेल-स्ट्रूव फलन $F_{\mu,\nu}(z)$ को हम $H_\mu(z)\ J_\nu(z)$ गुणनफल के रूप में पारिभाषित करेंगे जहाँ

$$H_\mu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m(\frac{1}{2}z)^{\mu+2m+1}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(\mu+m+\frac{3}{2})} \quad . \quad . \quad . \quad (1\cdot1)$$

तथा

$$J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n(z/2)^{\nu+2m}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad (1\cdot2)$$

और $H_\mu(z)$ तथा $J_\nu(z)$ क्रमशः μ तथा v कोटि के स्ट्रूव और बेसेल फलन हैं।

2. सम्बन्ध I.

$$2\nu F_{\mu,\nu}(z)=zF_{\mu,\nu-1}(z)+zF_{\mu,\nu+1}(z) \quad . \quad . \quad . \quad (2\cdot1)$$

इसे सिद्ध करने के लिए हम

$$\mathcal{J}_\nu(z)=\frac{z}{2\nu}[\mathcal{J}_{\nu-1}(z)+\mathcal{J}_{\nu+1}(z)] \quad . \quad . \quad . \quad (2\cdot2)$$

सम्बन्ध का व्यवहार करेंगे जो वाट्सन [2] द्वारा प्राप्त है।

सम्बन्ध II. (2·2) में दोनों ओर $H_\mu(z)$ से गुणा करने पर हमें (2·1) की प्राप्ति होगी।

$$2\mu F_{\mu,\nu}(z)=zF_{\mu-1,\nu}(z)+zF_{\mu+1,\nu}(z) - \frac{z^{\mu+1}}{2\mu^{\mu+1}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\mathcal{J}_\nu(z) \quad (2\cdot3)$$

जहाँ $\mathcal{J}_\nu(z)$ एक ν कोटि का बेसेल फलन है।

हमें वाट्सन [2] का निम्नांकित सम्बन्ध ज्ञात है

$$H_\mu(z)=\frac{z}{2\mu}\left[H_{\mu-1}(z)+H_{\mu+1}(z)-\frac{z^\mu}{2^\mu\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\right] \quad (2\cdot4)$$

इसमें दोनों ओर $\mathcal{J}_\nu(x)$ द्वारा गुणा करने पर (2·3) की प्राप्ति होती है।

सम्बन्ध III.

$$4\mu\nu F_{\mu,\nu}(z)=z^2[F_{\mu-1,\nu-1}(z)+F_{\mu+1,\nu-1}(z)+F_{\mu-1,\nu+1}(z)+F_{\mu+1,\nu+1}(z)] - \frac{z^{\mu+2}}{2^\mu\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}[\mathcal{J}_{\nu-1}(z)+\mathcal{J}_{\nu+1}(z)] \quad (2\cdot5)$$

जहाँ $\mathcal{J}_{\nu+1}(z)$ तथा $\mathcal{J}_{\nu+1}(z)$ क्रमशः $\nu-1$ तथा $\nu+1$ कोटि के बेसेल फलन हैं।

यह परिणाम (2·2) तथा (2·4) के प्रत्यक्ष गुणा करने पर प्राप्त होगा।

सम्बन्ध IV.

$$\frac{d}{dz}\{z^{\mu+\nu}F_{\mu,\nu}(z)\}=z^{\mu+\nu}[F_{\mu-1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu-1}(z)] \quad (2\cdot6)$$

स्पष्टतः वाट्सन [2] के

$$\frac{d}{dz}[z^\mu H_\mu(z)]=z^\mu H_{\mu-1}(z) \quad (2\cdot7)$$

तथा
$$\frac{d}{dz}[z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}(z)]=z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu-1}(z) \tag{2·8}$$

सम्बन्धों के बल पर ही हमें

$$\frac{d}{dz}\{z^{\mu+\nu}F_{\mu,\nu}(z)\}=\frac{d}{dz}\{z^{\mu}H_{\mu}(z)\,.\,z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}(z)\}$$

(2·7) तथा (2·8) सम्बन्धों के प्रयोग से (2·6) की प्राप्ति होगी।

सम्बन्ध V.

$$\frac{d}{dz}\{z^{-\mu-\nu}F_{\mu,\nu}(z)\}=\frac{z^{-\nu}}{2^{\mu}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z)-z^{-\mu-\nu}[F_{\mu+1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu+1}(z)] \tag{2·9}$$

अब वाट्सन [2] के

$$\frac{d}{dz}[z^{-\mu}H_{\mu}(z)]=\frac{1}{2^{\mu}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}-z^{-\mu}H_{\mu+1}(z) \tag{2·10}$$

तथा
$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}\mathcal{J}_{\nu}(z)]=-z^{-\nu}\mathcal{J}_{\nu+1}(z) \tag{2·11}$$

सम्बन्धों का प्रयोग करने पर वांछित सम्बन्ध (2·9) की प्राप्ति होती है।

सम्बन्ध VI.

$$2zF'_{\mu,\nu}(z)=z[F_{\mu-1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu+1}(z)-F_{\mu+1,\nu}(z)-F_{\mu,\nu-1}(z)]+\frac{z^{\mu+1}}{2^{\mu}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z) \tag{2·12}$$

सम्बन्ध IV तथा V से हमें

$$2zF'_{\mu,\nu}(z)+(\mu+\nu)F_{\mu,\nu}(z)=z[F_{\mu-1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu+1}(z)] \tag{2·13}$$

तथा
$$zF'_{\mu,\nu}(z)-(\mu+\nu)F_{\mu,\nu}(z)=\frac{z^{\mu+1}}{2^{\mu}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z)-z[F_{\mu+1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu+1}(z)] \tag{2·14}$$

प्राप्त होंगे। अब (2·13) तथा (2·14) को जोड़ने पर हमें (2·12) का प्राप्ति होगी।

सम्बन्ध VII.

$$2(\mu+\nu)F_{\mu,\nu}(z)=z[F_{\mu-1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu-1}(z)+F_{\mu+1,\nu}(z)+F_{\mu,\nu+1}(z)] - \frac{z^{\mu+1}}{2^{\mu}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z) \qquad (2\cdot15)$$

(2·13) से (2·14) को घटाने पर हमें (2·15) की प्राप्ति होगी।

सम्बन्ध VIII.

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}F_{\mu,\nu}(z)+z\frac{d}{dz}F_{\mu,\nu}(z)+(2z^2-\mu^2-\nu^2-2\mu\nu)F_{\mu,\nu}(z)$$
$$=2[z^2F_{\mu-1,\nu-1}(z)-z\mu F_{\mu,\nu-1}(z)-z\nu F_{\mu-1,\nu}(z)] + \frac{4\pi^{-1/2}(z/2)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z) \qquad (2\cdot16)$$

अब हम

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\mu^2)u=\frac{4\pi^{-1/2}(z/2)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \qquad (2\cdot17)$$

तथा

$$z^2\frac{d^2v}{dz^2}+z\frac{dv}{dz}+(z^2-\nu^2)v=0 \qquad (2\cdot18)$$

चलन समीकरणों पर विचार करेंगे जहाँ वाट्सन [2] के अनुसार $u=H_{\mu}(z)$ तथा $v=\mathcal{J}_{\nu}(z)$,

अब

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}(uv)+z\frac{d}{dz}(uv)=v\left\{z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}\right\} +u\left\{z^2\frac{d^2v}{dz^2}+z\frac{dv}{dz}\right\}+2z^2\frac{du}{dz}\cdot\frac{dv}{dz},$$

अथवा

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}(uv)+z\frac{d}{dz}(uv)=v\left\{z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}\right\} +u\left\{z^2\frac{d^2v}{dz^2}+z\frac{dv}{dz}\right\}+2z\frac{du}{dz}\cdot z\frac{du}{dz}.$$

(2·17) तथा (2·18) सम्बन्धों से

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2}(uv)+z\frac{d}{dz}(uv)=v\left\{-(z^{\nu}-\mu^2)u+\frac{4\pi^{-1/2}(z/2)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\right\}$$

$$+u\{-(z^2-\nu^2)v\}+2z\frac{du}{dz}\cdot z\frac{dv}{dz}$$

या

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}F_{\mu,\nu}(z)+z\frac{zd}{dz}F_{\mu,\nu}(z)+(2z^2-\mu^2-\nu^2)F_{\mu,\nu}(z)$$

$$=\frac{4\pi^{-1/2}(z/2)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z)+2z\,H'_{\mu}(z)\cdot z\,\mathcal{J}'_{\mu}(z)$$

की प्राप्ति होगी। पुनः वाट्सन [2] के

$$z\,H'_{\mu}(z)=Z\,H_{\mu-1}(z)-\mu\,H_{\mu}(z) \tag{2·19}$$

तथा

$$z\,\mathcal{J}'_{\nu}(H)=z\,\mathcal{J}_{\nu-1}(z)-\nu\,\mathcal{J}_{\nu}(z) \tag{2·20}$$

सम्बन्धों के प्रयोग से

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}F_{\mu,\nu}(z)+z\frac{d}{dz}F_{\mu,\nu}(z)+(2z^2-\mu^2-\nu^2-2\mu\nu)F_{\mu,\nu}(z)$$

$$=2\{z^2F_{\mu-1,\nu-1}(z)-z\mu F_{\mu,\nu-1}(z)-z\nu F_{\mu-1,\nu}(z)\}+\frac{4\mu^{-1/2}(z/2)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\mathcal{J}_{\nu}(z)$$

की प्राप्ति होगी और यही वांछित परिणाम है।

सम्बन्ध IX.

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^n[z^{\mu+\nu}F_{\mu,\nu}(z)]=z^{\mu+\nu-n}\sum_{m=0}^{n}{}^nc_mF_{\mu-n+m,\nu-m}(z)\quad . \quad . \tag{2·21}$$

इस सम्बन्ध को सिद्ध करने के लिये हम

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^n[z^{\mu+\nu}F_{\mu,\nu}(z)]=\left(\frac{d}{zdz}\right)^n[z^{\mu}H_{\mu}(z)\cdot z^{\nu}\mathcal{J}_{\nu}(z)]$$

$$=\frac{d^n}{d(z^2/2)^n}[z^\mu H_\mu(z)\cdot z^\nu \mathcal{J}_\nu(z)]$$

व्यंजक पर विचार करेंगे जो z को $z^2/2$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{(\mu+\nu)/2}F_{\mu,\nu}(\sqrt{2z})]=\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{\mu/2}H_\mu(z)\times(2z)^{\nu/2}\mathcal{J}_\nu(\sqrt{2z})]$$

का रूप धारण कर लेगा। पुनः वाट्सन [2] के

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n[(2z)^{\mu/2}H_\mu(\sqrt{2z})]=(2z)^{\mu/2-n/2}H_{\mu-n}(\sqrt{2z}) \qquad (2\cdot22)$$

तथा

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n[(2z)^{\nu/2}\mathcal{J}_\nu(\sqrt{2z})]=(2z)^{\nu/2-n/2}\mathcal{J}_{\nu-n}(\sqrt{2z}) \qquad (2\cdot23)$$

सम्बन्धों का प्रयोग करने पर तथा nवें चलन गुणांक के लिए लीबनित्स प्रमेय का व्यवहार करने पर हमें

$$\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{(\mu+\nu)/2}F_{\mu,\nu}(z)]=\sum_{m=0}^{n}{}^nc_m(2z)^{(\mu-n+m)/2}H_{\mu-n+m}(\sqrt{2z})$$

$$\times(2z^{(\nu-\mu)/2}\mathcal{J}_{\nu-m}(\sqrt{2z}).$$

$$=(2z)^{(\mu+\nu-n)/2}\sum_{m=0}^{n}{}^nc_mF_{\mu-n+m,\nu-m}(\sqrt{2z}) \qquad (2\cdot24)$$

प्राप्त होगा। जब (2·24) में $\sqrt{2z}$ के स्थान पर z लिखने पर हमें (2·21) की प्राप्ति होगी।

स्पष्ट है कि (2·21) में $n=1$ रखने पर (2·6) की प्राप्ति होगी।

सम्बन्ध X.

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^n[z^{-(\mu+\nu)}F_{\mu,\nu}(z)]=z^{-(\mu+\nu+n)}\sum_{m=0}^{n}(-)^{n-m}\,{}^nc_mF_{\mu+n-m,\nu+m}(z)$$

$$+\sum_{m=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}{}^nc_m(-)^m\frac{(-2)^{n-m-1}}{2^\mu\pi\,z^{2(n-m)-1}}(z^2/4)^r\frac{\Gamma(n-m-\nu-\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+r+\frac{3}{2})}$$

$$(z)^{-(\nu+m)}\mathcal{J}_{\nu+m}(z) \qquad (2\cdot25)$$

जहाँ $\mathcal{J}_{\nu+m}(z)$, $(\nu+m)$ कोटि का बेसेल फलन है। अब हम

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^n [z^{-(\mu+\nu)}F_{\mu,\nu}(z)] = \left(\frac{d}{zdz}\right)^n [(z^{-\mu}H_\mu(z) \cdot z^{-\nu}\mathcal{J}_\nu(z)]$$

व्यंजक पर विचार करेंगे जो z के स्थान पर $(z^2)/2$ रखने पर

$$\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{-(\mu/2)-(\nu/2)}F_{\mu,\nu}(\sqrt{2z})] = \frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{-\mu/2}H_\mu(\sqrt{2z}) \times (2z)^{-\nu/2}\mathcal{J}_\nu(\sqrt{2z})]$$

$$= \sum_{m=0}^{n} {}^nc_m D^{n-m}[(2z)^{-\mu/2}H_\mu(\sqrt{2z})[D^m](2z)^{-\nu/2}\mathcal{J}_\nu(\sqrt{2z})]$$

रूप धारण करता है जहाँ $D \equiv \frac{d}{dz}$, (लीबनित्स प्रमेय के अनुसार)।

अब

$$\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{-\mu/2}H_\mu(\sqrt{2z})] = \frac{(-2)^{n-1}2^{-\mu}}{\pi(2z)^{n-1/2}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(z/2)^r \Gamma(u-r-\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+r+\frac{3}{2})} + (-)^n z^{-(\mu+n/2)} H_{\mu+n}(\sqrt{2z}) \quad (2{\cdot}26)$$

तथा

$$\frac{d^n}{dz^n}[(2z)^{-\nu/2}\mathcal{J}_\nu(\sqrt{2z})] = (-)^n(2z)^{-(\nu+n/2)}\mathcal{J}_{\nu+n}(\sqrt{2z}) \quad (2{\cdot}27)$$

सम्बन्धों का प्रयोग करने पर प्रथम परिणाम भौमिक [1] द्वारा प्राप्त है जबकि बाद वाला वाट्सन द्वारा[2] वांछित परिणाम की प्राप्ति $\sqrt{2z}$ के स्थान पर z रखने से होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बृज मोहन का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र लिखने में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. भौमिक, के० एन०। **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1963, **6**, 1-11.

2. वाट्सन, जी० एन०। Theory of Bessel Functions, 1958.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, 10, 183-187

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 183-187

सीमेंट तथा सीमेंट बालू गारा के जमने तथा बैठने के प्रभाव का अध्ययन

तेज नारायण चोजर

सहायक रिसर्च आफिसर, पी० डब्लू० डी० रिसर्च इंस्टीच्यूट,

लखनऊ

[प्राप्त—जून, 1967]

सारांश

ए० एस० टी० एम० (A.S.T.M.) तथा सी० आर० आर० आई० (C.R.R.I.) इन दोनों विधियों में विलेय सिलिका तथा चूने की प्रतिशतता सीमेंट बालू गारे के विश्लेषण की आधार भूमि है। सीमेंट तथा बालू गारे के जमने तथा बैठने के प्रभाव का अध्ययन किया गया और यह देखा गया कि जब दहनोपरान्त क्षति पर विचार किया जाता है तो सीमेंट के विलेय सिलिका तथा चूने पर जमने तथा बैठने का कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता।

गारों (महीन तथा मोटी बालू के साथ) के साथ प्राप्त परिणाम सन्तोषजनक रहे और जो अनुपात प्राप्त हुये उन पर विश्वास किया जा सकता है।

Abstract

Effect of setting and curing on cement and cement sand mortar. *By* T.N. Chojer, Assistant Research Officer, P.W.D. Research Institute, Lucknow.

The percentage of soluble silica and lime forms the basis of analysis of cement sand mortar both by A.S.T.M. and C.R.R.I. Methods. The effect of setting and curing on cement and cement sand mortar was studied and it was found that there is no marked effect of curing and setting on the soluble silica and lime content of cement, when loss on ignition is taken into consideration.

In mortars (both with fine and coarse sand) also, the results obtained are quite satisfactory and the proportions obtained can be safely relied upon.

भवन निर्माण सामग्री पर यथेष्ठ नियन्त्रण कर पाना एक समस्या है। एक ओर जहाँ यह आवश्यक है कि प्रयुक्त की जाने वाली सामग्री यथा सीमेंट, चूना, बालू, ईंट आदि अच्छी किस्म की हों, वहीं यह भी आवश्यक है कि उन्हें किस अनुपात में मिलाया जावे। इमारतों की आवश्यकता के अनुसार इंजीनियर विभिन्न अनुपातों का निर्धारण कर देते हैं और इमारतों के निर्माण के कार्य का निरीक्षण तथा यह देखना कि अच्छी किस्म की सामग्री का उपयोग निर्धारित अनुपातों में हो रहा है या नहीं, क्षेत्र अधिकारियों की जिम्मेदारी है। सभी प्रकार की सावधानी बरतने पर भी ऐसे निम्नतर मिश्रणों का व्यवहार होता है जो कम खर्चीले पड़ते हैं जिसके परिणामस्वरूप निर्माण कार्य निर्बल पड़ जाता है और कभी कभी अल्पावधि में या फिर निर्माण काल में ही वह ध्वंस हो जाता है। ऐसी दशाओं में निर्माण सामग्री के नमूने प्रयोगशालाओं में सही-सही अनुपात जानने के लिये भेजे जाते हैं।

ताजे, बिना जमे गारों के लिये प्रयुक्त विधि सरल है क्योंकि चलनी से चालकर सीमेंट तथा बालू का अनुपात ज्ञात कर लिया जाता है किन्तु जमे हुए गारे के नमूने के विश्लेषण में यह विधि व्यवहार्य नहीं होती। फलतः सीमेंट, बालू तथा गारे में विलेय सिलिका तथा चूने का निश्चयन करना होता है। इस सिद्धान्त पर कई विधियाँ आधारित हैं। ए० एस० टी० एम० द्वारा संस्तुत विधि (सी 85/54) तथा सेन्ट्रल रोड रिसर्च इंस्टीच्यूट नई दिल्ली द्वारा इसके संशोधन में यह मान लिया जाता है कि सीमेंट तथा सीमेंट-बालू के गारों के जमने तथा बैठने के फलस्वरूप विभिन्न अवयवों में कोई अन्तर नहीं आता। कभी-कभी काफी समय बीत जाने के बाद ही गारे तथा कंक्रीट के नमूने विश्लेषणार्थ प्राप्त होते हैं अतः यह सोचा गया कि जमने तथा बैठने के फलस्वरूप विलेय सिलिका तथा चूना में कोई अन्तर आता होगा या नहीं यह जानना आवश्यक है। यह अभी विवादग्रस्त विषय है कि कच्चे माल—अर्थात् बालू तथा सीमेंट में प्राप्त विलेय सिलिका तथा चूने की मात्रा कंक्रीट या गारे के तद्‌गत अवयवों के समान होगी।

प्रयोगात्मक

तीन बन्द बक्सों में सीमेंट, महीन बालू तथा मोटी बालू की पर्याप्त मात्रायें लेकर भर ली गईं और प्रत्येक में से नमूने निकाल कर 105° से० पर 2 घंटे तक सुखाकर दहनोपरान्त क्षति, विलेय सिलिका तथा चूने की मात्रायें ज्ञात की गईं। अब सीमेंट तथा महीन बालू और सीमेंट तथा मोटी बालू के विभिन्न अनुपातों द्वारा कई गारे तैयार कर लिए गए। इसके पश्चात् सीमेंट तथा गारे के नमूनों को घनाकार साँचों में ($2'' \times 2'' \times 2''$) ढाल दिया गया। जमने के बाद घनों को जल के भीतर एक मास तक बैठने दिया गया और फिर निकाल कर हवा में छोड़ दिया गया। इसके बाद गारे के शुष्क मिश्रणों, जल के भीतर 1 मास तक जमे तथा बैठे गारे के नमूनों, वायु में 3 मास तक तथा 6 मास तक पड़े गारे के इन्हीं नमूनों का विश्लेषण किया गया। इसके लिये नमूनों को सुखाकर चूर्ण करके 52 छिद्र वाली चलनी से चाल लिया गया।

इन नमूनों का विश्लेषण सी० आर० आर० आई० की परिवर्द्धित विधि द्वारा किया गया।

सभी नमूनों में दहनोपरान्त क्षति का निश्चय [illegible] शुष्क आधार पर तथा दहनोपरान्त क्षति को ध्यान में रखते हुए किया गया।

प्राप्त परिणाम सारणी 1—3 में अंकित हैं।

सारणी 1

सीमेंट पर जमने तथा बैठने का प्रभाव

%	ऊष्मक शुष्क आधार				दहनोपरान्त क्षति का ध्यान रखते हुये			
	ताजा नमूना	1 मास बाद	3 मास बाद	6 मास बाद	ताजा नमूना	1 मास बाद	3 मास बाद	6 मास बाद
1. विलेय सिलिका	21·14	17·85	17·95	18·1	21·57	21·39	21·5	22·06
2. कैल्सियम आक्साइड (चूना)	61·66	52·24	52·19	49·81	62·87	63·7	62·5	60·6
3. दहनोपरान्त क्षति	1·91	18·1	16·5	17·77	—	—	—	—

सारणी 2

सीमेंट-बालू गारा के जमने तथा बैठने का प्रभाव (अनुपात, ऊष्मक शुष्क आधार पर)

क्रमांक	विवरण	ताजा नमूना		1 मास बाद		3 मास बाद		6 मास बाद	
		सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर	सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर	सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर	सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर
1.	सीमेंट-महीन बालू	1:2·13	1:2·08	1:2·39	1:2·3	1:2·55	1:2·26	1:2·26	1:1·39
2.	सीमेंट-महीन बालू	1:4·32	1:4·34	1:4·6	1:4·44	1:4·21	1:4·43	1:4·4	1:4·5
3.	सीमेंट-महीन बालू	1:8·5	1:8·9	1:8·26	1:9·5	1:7·4	9·4	1:10·88	1:9·15
4.	सीमेंट-मोटी बालू	1:2·4	1:3·08	...	...	1:2·23	1:2·5	1:2·1	1:2·23
5.	सीमेंट-मोटी बालू	1:3·7	1:2·95	...	...	1:3·6	1:3·4	1:3·8	2:3·7

सारणी 3

सीमेंट-बालू गारा के जमने तथा बैठने पर प्रभाव (अनुपात, दहनोपरान्त क्षति के अनुसार)

क्रमांक	विवरण	ताजे नमूने		1 मास बाद		3 मास बाद		6 मास बाद	
		सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर	सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर	सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर	सिलिका के आधार पर	चूना के आधार पर
1.	सीमेंट-महीन बालू	1:2·04	1:2·001	1:2·02	1:1·96	1:2·18	1:2·07	1:1·91	1:1·71
2.	सीमेंट-महीन बालू	1:4·21	1:4·26	1:4·23	1:4·18	1:3·92	1:4·18	1:4·17	1:4·23
3.	सीमेंट-महीन बालू	1:8·4	1:8·8	1:6·03	1:9·3	1:7·2	1:9·1	1:10·1	1:8·7
4.	सीमेंट-मोटी बालू	1:2·04	1:1·72	...	...	1:1·89	1:2·08	1:1·9	1:1·94
5.	सीमेंट-मोटी बालू	1:3·22	1:2·52	...	...	1:3·17	1:2·8	1:3·3	1:3·19

विवेचना

सारणी 1 से स्पष्ट है कि सीमेंट में शुष्क अवस्था में तथा 1, 3 तथा 6 मास के जमने तथा बैठने के बाद भी विलेय सिलिका तथा चूना की मात्राओं में विशेष अन्तर नहीं आया (दहनोपरान्त क्षति पर ध्यान रखते हुए)। ऐसा प्रतीत होता है कि दहनोपरान्त क्षति पर विचार करने से जमने के प्रभावों का निराकरण हो जाता है।

गारे के नमूनों में दहनोपरान्त क्षति को निकाल देने पर प्राप्त परिणाम ऊष्मक शुष्क आधार की अपेक्षा सीमेंट तथा बालू के वास्तविक अनुपातों के अत्यन्त सन्निकट हैं। महीन तथा मोटी बालू इन दोनों के ही साथ प्राप्त परिणाम भी समान हैं तथा विश्वसनीय भी (10% यथार्थता तक)। केवल 1:8 सीमेंट तथा महीन बालू के गारों में जमने के बाद निम्नतर मान प्राप्त हुए (सारणी 2 तथा 3)। यह प्रयोगात्मक त्रुटि के कारण भी सम्भव है क्योंकि सीमेंट की निम्नतम मात्राओं पर विश्लेषण सम्बन्धी छोटी भी त्रुटि आवर्धित हो जाती है।

प्राप्त परिणामों से यह निष्कर्ष निकलता है कि यदि दहनोपरान्त क्षति को ध्यान में रखते हुए जमने तथा बैठने की क्रिया का प्रभाव देखा जाय तो गारों के विश्लेषण मानों में कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक पी० डब्लू० डी० रिसर्च इंस्टीच्यूट के मुख्य इंजीनियर तथा निर्देशक का आभारी है जिन्होंने यह शोधपत्र प्रकाशित कराने की अनुमति प्रदान की ।

निर्देश

1. **ए० एस० टी० एम० स्टैण्डर्ड्स**, 1952, **भाग 3**, पृ० 1079.

2. मेहरा, एस०आर० तथा सेठी, के० एल० । Report on determination of mix proportion in hardened concrete.

3. सेन गुप्ता, डी० पी० । **इण्डियन कंक्रीट जर्न०, नवम्बर** 1958, पृ० 389.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 189-196

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 189-196

समाकल परिवर्त सम्बन्धी कतिपय अभिसारी प्रमेय

पी० सी० गोलस

गवर्नमेंट कालेज, कठपुतली, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 22, 1967]

सारांश

इस शोध पत्र में परिवर्त

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-ast}\, G_{p,q}^{m,n}\left(bst\middle|\begin{matrix}a_1\ldots,ap\\ b_1\ldots,bq\end{matrix}\right) d\alpha(t)$$

के लिये अभिसरण एवं घात प्रमेयों की स्थापना की गई है जो माइजर तथा वर्मा द्वारा प्राचलों के विशिष्ट मानों के लिए सर्वीकृत लैपलास परिवर्त में परिणत हो जाती हैं।

Abstract

Certain convergence theorems for an integral transform. *By* **P. C.** Golas, Government College, Kotputhli, Jaipur.

In this paper convergence and order theorems for the transform

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-ast} G_{p,q}^{m,n}\left(bst\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,ap\\ b_1,\ldots,bq\end{matrix}\right) d\alpha(t),$$

have been established which reduces to generalized Laplace transforms given by Meijer and Varma for particular values of the parameters.

1. हाल ही में लेखक ने[3] एक परिवर्त

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-ast} G_{p,q}^{m,n}\left(bst\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,ap\\ b_1,\ldots,bq\end{matrix}\right) d\alpha(t), \tag{1.1}$$

का सूत्रपात किया है जिसमें G माइजर फलन [4, p. 207] को व्यक्त करता है। निम्नांकित तत्समकों से (1·1) परिवर्त माइजर[1] तथा वर्मा[2] द्वारा दिये गये सर्वीकृत लैपलास परिवर्तों

(1.2)
$$e^{-st}G_{1,2}^{2,1}\left(2st\Big|{1 \atop \frac{1}{2}-\nu,\ \frac{1}{2}+\nu}\right)\equiv\Gamma^*(\tfrac{1}{2}\pm\nu)\left(\frac{2st}{\pi}\right)^{1/2}K_\nu(st)$$

तथा

(1.3)
$$e^{-st}G_{1,2}^{2,1}\left(2st\Big|{m+k+1 \atop \frac{1}{2}-m,\ \frac{1}{2}+m}\right)\equiv\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm m-k)(2st)^{-1/4}\,.\,W_{k,m}(2st)$$

में क्रमशः परिणत हो जाता है।

प्रस्तुत शोध पत्र में समाकल (1.1) की अभिसरण विशेषताओं की विवेचना की जावेगी जहाँ $\alpha(t)$ वास्तविक चर t का $0\leqslant t<\infty$ अन्तराल में फलन है और प्रत्येक R के लिए $0\leqslant t\leqslant R$ में सीमित विचरण वाला है। समस्त प्राचलों को वास्तविक माना गया है।

स्थान बचाने के उद्देश्य से

$$G_{p,q}^{m,n}\left(bst\Big|{a_1,\ldots,ap \atop b_1,\ldots,bq}\right)$$

को $G(bst)$ द्वारा तथा

$$G_{p,q}^{m,n}\left(bst\Big|{a_1-1,\ a_2,\ldots,ap \atop b_1,\ b_2,\ldots,bq}\right)$$

को $G(bst/a_1-1)$ द्वारा व्यक्त किया गया है।

अनुभाग 3 में [1, p. 210(13) तथा 212(18)] परिणामों की आवश्यकता पड़ेगी जो निम्नांकित हैं :

(2.1)
$$x\frac{d}{dx}G_{p,q}^{m,n}\left(x\Big|{a_r \atop b_s}\right)=G_{p,q}^{m,n}\left(x\Big|{a_1-1,\ a_2\ \ldots,\ ap \atop b_1,\ldots,\qquad bq}\right)$$
$$+(a_1-1)G_{p,q}^{m,n}\left(x\Big|{a_r \atop b_s}\right),\ n\geqslant1$$

तथा

(2.2)
$$G_{p,q}^{m,n}\left(x\Big|{a_r \atop b_s}\right)=O(|x|^\beta)\ \text{as}\ x\to0$$

जहाँ $p\leqslant q$ तथा $\beta\ =\min\ Re(b_h)$ यदि $h=1,2,\ldots,m.$

$*(\Gamma\frac{1}{2}\pm\nu)=\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)$

3. इस अनुभाग में कुछ अभिसरण प्रमेय सिद्ध की जावेंगी ।

प्रमेय—1. यदि

$$\underset{O\leqslant u<\infty}{u.b}\left|\int_0^{\omega} e^{-as_0t} G_{p,q}^{m,n}\left(bs_0t\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,ap\\b_1,\ldots,bq\end{matrix}\right)d\alpha(t)\right|=M<\infty, \tag{3.1}$$

तो समाकल

$$\int_0^{\infty} e^{-ast} G_{p,q}^{m,n}\left(bst\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,ap\\b_1,\ldots,bq\end{matrix}\right)d\alpha(t) \tag{3.2}$$

$s>s_0$ होने पर $a>0$, $b>0$, $n\geqslant1$, $\min(a_i\leqslant 1$; $i=1,\ldots,n$; $\min(b_i)>0$, $i=1,\ldots,m$; से अभिसारी होता है और

$$\int_0^{\infty}\psi(s,t)\,\beta(t)\,dt \tag{3.3}$$

के बराबर भी, जहां

$$\psi(s,t)=\frac{e^{-at(s-s_0)}}{t\{G(bs_0t)\}^2}\{G(bst|a_1-1)G(bs_0t)$$
$$+G(bst)G(bs_0t/a_1-1)+at(s-s_0)G(bst)G(bs_0t)\} \tag{3.4}$$

तथा

$$\beta(u)=\int_0^{u} e^{-as_0t}G(bs_0t)\,d\alpha(t). \tag{3.5}$$

उपपत्ति : यदि (μ) को (3·5) द्वारा पारिभाषित करें तो (5, p. 12) द्वारा

$$\int_0^R e^{-ast}\,G(bst)d\alpha(t)=\int_0^R e^{-ast}\cdot\frac{G(bst)}{G(bs_0t)}\,d\beta(t)$$
$$=\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\cdot\beta(t)G(bst)}{G(bs_0t)}\right]_{t=0}^{t=R}-\int_0^R\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\cdot G(bst)}{G(bs_0t)}\right]\beta(t)\,dt.$$

अब

$$\frac{e^{-at(s-s_0)}\beta(t)\,G(bst)}{G(bs_0t)}=0,\ (t\to0)$$

यदि $$a>0,\ s>s_0,\ \beta(0)=0$$

तथा $$G(bst)=0(t^{\min(b_i)}),\ (i=1,2,\ldots,m;\ t\to 0).$$

पुनः

$$\operatorname*{Lim}_{R\to\infty} \frac{e^{-aR(s-s_0)}\,.\,G(bsR)}{G(bs_0R)}\ \beta(R)=0,\ (R\to\infty).$$

यदि $a>0, s>s_0, \beta(\infty)$ विद्यमान हों

$$\operatorname*{Lim}_{R\to\infty} e^{-aR(s-s_0)}\to 0,\ (R\to\infty)$$

तथा

$$G(bst)=O(t^{\min(ai)-1}),\ (i=1,\ldots,n,\ t\to\infty)$$

पुनः

$$\left|\int_0^R \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\,.\,G(bst)}{G(bs_0t)}\right]\beta(t)\,dt\ \right|$$

$$\leqslant M\left|\int_0^R \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\,.\,G(bst)}{G(bs_0t)}\right]dt\right|$$

$$=M\left|\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\,G(bst)}{G\ bs_0t}\right]_{t=0}^{t=R}\right|$$

ऊपर के विवेचन से यह स्पष्ट है कि कथित प्रतिबन्धों में ऊपर दाहिनी ओर की असमानता निश्चित है चाहे R कितना भी बड़ा क्यों न हो। अतः (3·3) के आधार पर

$$\int_0^\infty e^{-ast}G(bst)\,d\alpha(t)=-\int_0 \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\,.\,G(bst)}{G(bs_0t)}\right]\beta(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty \psi(s,t)\,\beta(t)\,dt$$

जहाँ $\psi(s,t)$ को (3·4) द्वारा पारिभाषित किया जाता है।

चूँकि (2·1) के प्रयोग से

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{-at(s-s_0)}\cdot G(bst)}{G(bs_0t)}\right]=-\psi(s,t),\ n\geqslant 1.$$

यही प्रमेय है।

उपप्रमेय : यदि समाकल (3·2) $s=s_0$ के लिये अभिसारी हो तो यह समस्त $s>s_0$ के लिये भी अभिसारी होगा क्योंकि यदि (3·2) $s=s_0$ के लिए अभिसारी हो तो (3·1) घटित होगा और फलतः (3·2) समस्त $s>s_0$ के लिए अभिसारी होगा।

प्रमेय 2 : यदि समाकल (3·2) अभिसारी हो तो

$$\alpha(t)=0\left[\frac{e^{-as_0t}}{G(bs_0t)}\right],\ (t\to\infty)$$

प्रत्येक $s_0>0,\ a>0,\ b>0,\ \min(b_i)>0,\ i=1,2,\ldots\ldots,m;\ \min(a_i)\leqslant 1,\ i=1,2,\ldots\ldots,n,$

उपपत्ति : माना कि

$$\beta(t=\int_{s_0}^{t}e^{-as_0u}G(bs_0u)\,d\alpha(u),\ (0<t<\infty) \tag{3.6}$$

तो [5, p. 12] के द्वारा

$$\int_{s_0}^{t}d\alpha(u)=\int_{s_0}\frac{e^{as_0u}}{G(bs_0u)}\,d\beta(u)$$

या

$$[\alpha(t)-\alpha(s_0)]=\frac{e^{as_0t}\beta(t)}{G(bs_0t)}-\int_{s_0}^{t}\frac{d}{du}\left[\frac{e^{as_0u}}{G(bs_0u)}\right]\beta(u)\,du.$$

$\therefore$ (3·6) के बल पर $\beta(s_0)=0$ जब $t\to s_0$

अतः

$$\lim_{t\to\infty}e^{-a_0st}G(bs_0t)[\alpha(t)-\alpha(s_0)]$$

$$=\beta(\infty)-\lim_{t\to\infty}e^{-as_0t}G(bs_0t)\int_{s_0}^{t}\frac{d}{du}\left[\frac{e^{as_0u}}{G(bs_0u)}\right]\beta(u)\,du$$

मध्यमान प्रमेय का उपयोग करने पर

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} e^{-as_0t}\, G(bs_0t)[\alpha(t)-\alpha(s_0)] \sim \beta(\infty)-\beta(\infty).$$

अतः प्रमेय के प्रतिबन्धों की दशा में

$$\alpha(t)=0\left[\frac{e^{as_0t}}{G(bs_0t)}\right],\ (t\to\infty).$$

यही प्रमेय है ।

प्रमेय 3: यदि

$$\alpha(t)=0\left[\frac{e^{as_0t}}{G(bs_0t)}\right], \tag{3.7}$$

तो समाकल (1·1) समस्त s के लिये अभिसारी है यदि $\min(b_i)>0$ $i=1,2,\ldots,m$; $\min(a_i)\leqslant 1$, $i=1,2,\ldots,n$.

उपपत्ति $\therefore$ $\alpha(t)$ प्रत्येक सान्त अन्तराल में सीमित विचरण वाला है अतः (3·7) से यह निष्कर्ष निकलता है कि एक स्थिरांक M ऐसा विद्यमान है कि

$$|\alpha(t)|\leqslant M\left[\frac{e^{as_0t}}{G(bs_0t)}\right],\ (0<t<\infty)$$

अतः*

$$\int_0^R \frac{d}{dt}[e^{-ast}G(bst)]\alpha(t)\,dt \leqslant M\left[\frac{e^{as_0R}}{G(bs_0R)}\right] \times\int_0^R \frac{d}{dt}\,[e^{-ast}G(bst)]\,dt$$

$$=M\left[\frac{e^{as_0R}}{G(bs_0{}^R)}\right]\Big[e^{-ast}G(bst)\Big]_{t=9}^{t=R}$$

इसलिये असमानता के बाईं ओर का समाकल $\min(b_i)>0$, $i=1, 2,\ldots, m$; $\min(a_i)\leqslant 1$, $i=1, 2,\ldots n$; के लिये अभिसारी होगा ।

---

*संकेत $\leqslant$ बताता है कि बाईं ओर का समाकल दाईं ओर द्वारा प्रभावित है या कि समाकलन के पूर्ण परास में प्रथम के Integrand का चरम मान दूसरे से अधिक नहीं है ।

अब

$$\int_0^R e^{-ast}G(bst)\, d\alpha(t)$$

$$=e^{-asR}G(bsR)\alpha(R)- \int_0^R \frac{d}{dt}[e^{-ast}G(bst)]\,\alpha(t)\,dt$$

किन्तु

$$e^{-asR}G(bst)\alpha(R)\to 0,\ (R\to\infty)$$

अतः प्रमेय के प्रतिबन्धों के भीतर (1·1) अभिसारी है।

इससे उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 4: यदि (1·1) समस्त $s>0$ $a>0, b>0$ के लिये $\min(b_i)>0, i=1,2,\ldots m;$ $\min(a_i)\leq 1,\ i=1,\ 2,\ldots,n;$ तथा $n\geqq 1$, के साथ अभिसारी हो तो

$$\int_0^\infty e^{-ast}G(bst)\,d\alpha(t)=(ast+1-a_1)\int_0^\infty t^{-1}e^{-ast}G(bst)\alpha(t)\,dt$$

$$-\int_0^\infty t^{-1}e^{-ast}G(bst/a_1-1)\alpha(t)\,dt.$$

उपपत्ति : हमें

$$\int_0^R e^{-ast}G(bst)\ d\alpha(t)=e^{-asR}G(bsR)\,\alpha(R)$$

$$-\int_0^R \frac{d}{dt}\,[e^{-ast}G(bst)]\ \alpha(t)\ dt,$$

प्राप्त होगा यदि $\min(b_i)>0,\ i=1,2,\ldots,m;\ t\to 0.$

अब प्रमेय 3 के अनुसार

$$e^{-asR}\,.\,G(bsR)\alpha(R)\to 0,\ (R\to\infty).$$

तथा (2·1) के प्रयोग करने पर

$$\frac{d}{dt}[e^{-ast}G(bst)]=t^{-1}\,e^{-ast}G(bst/a_1-1)$$

$$+(a_1-ast-1)t^{-1}e^{-ast}G(bst), M \geqq 1.$$

इस प्रकार

$$\int_0^\infty e^{-ast}G(bst)\, d\,\alpha(t) = (ast+1-a_1)\int_0^\infty t^{-1}e^{-ast}G(bst)\,\alpha(t)dt$$

$$-\int_0^\infty t^{-1}e^{-ast}G(bst/a_1-1)\,\alpha(t)\,dt,$$

प्राप्त होगा जो प्रमेय के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध होगा ।

निर्देश

1. माइजर, सी० एस० । **प्रो० कान० नेडर० एकेड० वेट०**, 1940, **43**, 599-608.
2. वर्मा, आर० एस० । करेंट साइंस, 1947, **16**, 17-18.
3. गोलस, पी० सी० । एनाल्स द ला सोसा० साइं०, ब्रुसेल्स (प्रेषित)
4. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental Function. भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.
5. विडर, डी० वी० । The Laplace Transform. प्रिंसटन यूनिवर्सिटी प्रेस, 1963.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 197-203

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 197-203

बेसेल फलन तथा सिलिंडर में ऊष्मा उत्पादन

एस० डी० बाजपेयी

श्री जी० एस० टेकनालाजिकल इंस्टीच्यूट, इंदौर (म०प्र०)

[प्राप्त—जून 22, 1967]

सारांश

प्रस्तुत शोध निबंध में सिलिंडर में ऊष्मा के विसरण के मूलभूत अवकल समीकरण को सिद्ध करने के लिए प्रथम प्रकार के बेसेल फलन का उपयोग किया गया है।

Abstract

Bessel function and heat production in a cylinder. *By* S. D. Bajpai, Department of applied Mathematics, Shri G. S. Technological Institute, Indore, M.P. (India).

In this paper we have employed the Bessel function of the first kind to solve the fundamental differential equation of the diffusion of heat in a cylinder.

1. भूमिका. इस शोध निबन्ध में हमने a त्रिज्या वाले सिलिंडर में ऊष्मा के विसरण पर विचार किया है जब कि ऊष्मा के स्रोत इसी के भीतर हों जिससे कि ताप का वितरण अक्षीय संमिति रूप से होता हो। तो मूलभूत अवकलन समीकरण का रूप [6, p, 202 (166)] निम्नांकित प्रकार होगा :-

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\theta(r, t). \tag{1.1}$$

यदि यह मान लिया जाय कि ऊष्मा का उत्पादन ताप पर निर्भर नहीं है और सिलिंडर अनन्त लम्बाई का है जिससे z के प्रति परिवर्तनों की उपेक्षा की जा सकती है। साथ ही हम यह भी मानेंगे कि पृष्ठ $r=a$ शून्य ताप पर ही स्थिर रखा जाता है तथा ताप का प्रारम्भिक वितरण भी शून्य है।

अब हम विशेषतः कल्पना करेंगे कि

$$(1.2) \qquad \theta(r, t) = \frac{k}{K} f(r) g(t),$$

जहाँ k पदार्थ की विसरणशीलता (diffusivity) है और K चालकता (conductivity) है।

इस शोध पत्र में हमें $f(r)$ तथा $g(t)$ के तीन मानों पर विचार किया है। यह देखा जावेगा कि $f(r)$ फलन से प्रणाली में सन्निहित स्रोतों एवं गर्तों (sinks) का निरूपण हो जाता है। जब भी $f(r)$ $g(t)$ गुणनफल का ऋणात्मक मान आवे तो उसे गर्त माना जाना चाहिये।

ऐसी दशायें जिनमें ठोसों में ऊष्मा उत्पन्न होती है प्राविधिक सम्प्रयोगों (2 p. 11-12) की दृष्टि से महत्त्वपूर्ण हो रही है। अन्तरिक्ष शोध तथा नाभिकीय भट्टियों में भी ऊष्मा स्थानान्तरण की विभिन्न समस्यायें उत्पन्न होती हैं।

2. सान्त हैंकेल परिवर्त

माना कि $f(r)$ का सान्त हैंकेल परिवर्त [6, p. 83]

$$(2.1) \qquad \mathcal{J}[f(r)] = \int_0^a r f(r) \mathcal{J}_0(r\xi_i)\, dr = f_j(\xi_i),$$

है तो [5, p. 299, (26)] से हमें

$$(2.2) \qquad \mathcal{J}[\{1-r^2/a^2\}^{\nu/2} \mathcal{J}_\nu\{\omega\sqrt{(1-r^2/a^2)}\}]$$

$$= a^2 y^{-1} (\omega/y)^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(y),$$

प्राप्त होगा जहाँ $y^2 = a^2\xi^2_i + \omega^2$, $Re\, \nu > -1$, तथा ξ_i अबीजीय समीकरण (transcendental equation) का मूल (root) है।

$$(2.3) \qquad \mathcal{J}_0(a\xi_i) = 0.$$

प्रतीप प्रमेय (inversion theorem) [6, p. 83] के आधार पर

$$(2.4) \qquad (1-r^2/a^2)^{\nu/2} \mathcal{J}_\nu\{\omega\sqrt{(1-r^2/a^2)}\}$$

$$= 2\sum_i \frac{\mathcal{J}_0(r\xi_i)}{[\mathcal{J}_1(a\xi_i)]^2} y^{-1} (\omega/y)^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(y),$$

जहाँ (2·3) समीकरण के सभी धनात्मक मूलों का योग कर लिया जाता है।

परिणाम (2·4) हल की पुष्टि में उपयोगी होगा ।

3. प्रश्न का हल

(1.1) का हल प्राप्त करने के लिये हम सांत हैंकेल परिवर्त (2.2) का उपयोग करेंगे । इसका हल [6, p. 203] के अनुसार

$$\mu(r, t)=\frac{2k}{K}\sum_i \frac{\mathcal{J}_0(r\xi_i)}{[\mathcal{J}_1(a\xi_i)]^2} y^{-1}(\omega/y)^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(y)\; h(\xi_i, t), \tag{3.1}$$

होगा जहाँ समीकरण के समस्त धनात्मक मूलों (roots) का योग ले लिया गया हो ।

$$\mathcal{J}_0(\xi_i)=0, \tag{3.2}$$

तथा

$$h(\xi_i, t)=\int_0^t g(\tau)e^{-k\xi_i^2(t-\tau)}d\tau. \tag{3.3}$$

हम (3.3) का मान कतिपय महत्वपूर्ण ऊष्मा स्रोतों (heat sources) के लिए ज्ञात करेंगे ।

4. प्रश्न की पुष्टि

(3.1) तथा [4, p. 100], से

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{2k^2}{K}\sum_i \frac{\xi_i^2\mathcal{J}_0(r\xi_i)}{[\mathcal{J}_1(a\xi_i)]^2} y^{-1}(\omega/y)^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(y) \times\int_0^t g(\tau)e^{-k\xi_i^2(t-\tau)}d\tau. \tag{4.1}$$

(1.2) तथा (2.4), से

$$\theta(r, t)=\frac{2k}{K}\sum_i \frac{\mathcal{J}_0(r\xi_i)}{[\mathcal{J}_1(a\xi_i)]^2} y^{-1}(\omega/y)^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(y) g(t), \tag{4.2}$$

तथा (3.1) से

$$(4.3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{2k}{K}\sum_i \frac{\mathcal{J}_0(r,\xi_i)}{[\mathcal{J}_1(a\xi_i)]^2}y^{-1}(\omega/y)^\nu \mathcal{J}_{\nu+1}(y)\left[g(t)-k\xi_i^2 \int_0^t g(\tau)e^{-k\xi_i^2(t-\tau)}d\tau\right]$$

उपर्युक्त मानों को (1.1) में रखने पर समीकरण की तुष्टि होती है।

सीमांत प्रतिबंध $u(a, t)=0$, की तुष्टि होती है, क्योंकि $\mathcal{J}_0(a\,\xi_i)$ शून्य है जो $u(a, t)$ के प्रत्येक पद में विद्यमान है। प्रारम्भिक प्रतिबंध की तुष्टि होती है क्योंकि $h(\xi_i, 0)=0$.

हम देखते हैं कि (3.1) लगातार अपसरण करता है यदि $t>0$ अतः इसके द्वरा निरूपित फलन $u(r, t)$ संतत होगा यदि $0\leqslant r\leqq a$.

पद प्रति पद अवकलन (differentiation) वैध होगा यदि (4.1) तथा (4.3) समरूप से अभिसारी हों, जब $t>0$ तथा $0\leqslant r\leqslant a$.

सामान्य प्रकार का ऊष्मा स्रोत

माना कि

$$(5.1) \qquad g(\tau)=g_0 e^{\tau z}\tau^{\gamma-1}(t-\tau)^{\rho-1}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta;\tau/t\\ \gamma\end{matrix}\right],$$

तो [3, p. 400(8)], का प्रयोग करने पर

$$(5.2) \qquad h(\xi_i, t)=g_0\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Gamma(\gamma+\rho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha)\Gamma(\gamma+\rho-\beta)}e^{-zt}t^{\gamma+\rho-1} \times {}_2F_2\left[\begin{matrix}\rho,\ \gamma+\rho-\alpha-\beta\\ \gamma+\rho-\alpha,\ \gamma+\rho-\beta\end{matrix};\left(z-k\xi_i^2\right)t\right],$$

जहाँ $Re>0,\ Re\,\rho>0,\ Re(\gamma+\rho-\alpha-\beta)>0.$

(5.2) से (3.1) में मान रखने पर

$$(5.3) \qquad u(r, t)=2g_0\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Sigma(\gamma+\rho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha)\Gamma(\gamma+\rho-\beta)}-e^{zt}t^{\gamma+\rho-1}\frac{k}{K} \times\sum_i \frac{\mathcal{J}_0(r\,\xi_i)}{[\mathcal{J}_1(a\xi_i)]^2}y^{-1}(\omega/y)^\nu\mathcal{J}_{\nu+1}(y)\,{}_2F_2\left[\begin{matrix}\rho,\ \gamma+\rho-\alpha-\beta\\ \gamma+\rho-\alpha,\ \gamma+\rho-\beta\end{matrix};\left(z-k\xi_i^2\right)t\right]$$

स्पष्ट है कि $u(r, 0)=0$

6. बहुपदीय प्रकार का ऊष्मा स्रोत

(5.1) तथा (5.2), में a को $-n$ द्वारा, β को $1+\alpha+\beta+n$ द्वारा, γ को $1+\alpha$ द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा [3,p. 268] का प्रयोग करने पर

$$(6.1) \qquad g(\tau)=g_0 e^{-\tau x}\tau^{\alpha}(t-\tau)^{\rho-1}\frac{n!}{(1+\alpha)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}\{1-2\tau/t\},$$

तथा

$$(6.2) \qquad h(\xi_i,t)=g_0 \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\rho)\Gamma(\rho-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\rho+n)\Gamma(\rho-\beta-n)} e^{-zt}\, t^{\alpha+\rho}$$

$$\times {}_2F_2\left[\begin{matrix}\rho,\ \rho-\beta \\ 1+\alpha+\rho+n,\ \rho-\beta-n\end{matrix};\ \left(z-k\xi_i^2\right)t\right]$$

जहाँ $Re\, \alpha>-1$, $Re\, \rho>0$, $Re(\rho-\beta)>0$.

(3.1) तथा (6.2), से

$$(6.3) \qquad u(r, t)=2g_0\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\rho)\Gamma(\rho-\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\rho+n)\Gamma(\rho-\beta-n)} e^{-zt}\, t^{\alpha+\rho}\frac{k}{K}$$

$$\times \sum_i \frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2} y^{-1}(\omega/y)^{\nu} J_{\nu+1}(y)$$

$${}_2F_2\left[\begin{matrix}\rho,\ \rho-\beta \\ 1+\alpha+\rho+n,\ \rho-\beta-n\end{matrix}\left(z-k\xi_i^2\right)t\right],$$

स्पष्ट है कि $u(r, 0)=0$.

लांबिक (आर्थोगनल) बहुपदों [7, p. 24] के विस्तार गुणधर्म को ध्यान में रखते हुए इस प्रकार के ऊष्मा स्रोत में कई रोचक दशायें अन्तर्निहित हो सकती हैं।

7. घातांकी प्रकार का ऊष्मा स्रोत

(5.1) तथा (5.2), में $\alpha=\beta=0$, रखने पर

$$(7.1) \qquad g(\tau)=g_0 e^{-z\tau}\tau^{\gamma-1}t(-\tau)^{\rho-1}$$

तथा

$$h(\xi_i, t) = g_0 \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} e^{-zt} t^{\gamma+\rho-1} {}_1F_1\left[\begin{matrix}\rho \\ \gamma+\rho\end{matrix}; \left(z-k\xi_i^2\right)t\right] \tag{7.2}$$

जहाँ $Re\,\gamma>0,\ Re\,\rho>0.$

(7.1) तथा (7.2), में $\rho=1$, रखने पर लैपलास परिवर्त के convolution प्रमेय का उपयोग करते हुए भोंसले [1, p. 86] द्वारा प्राप्त ऊष्मा स्रोत प्राप्त होता है। आगे भी $\gamma=1,\ z=0$, रखने पर तथा [4, p. 271] अर्थात् ${}_1F_1\left[\begin{matrix}1 \\ 2\end{matrix}; z\right]=\frac{e^z-1}{z}$, का प्रयोग करने पर हमें भोंसले द्वारा प्राप्त निश्चित अवधि तक कार्यशील ऊष्मा स्रोत प्राप्त होगा।

(7.2) से (3.1) में मान रखने पर

$$u(r, t) = 2g_0 \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma+\rho)} e^{-zt} t^{\gamma+\rho-1} \frac{k}{K} \times \sum_i \frac{J_0(r\xi_i)}{[J_1(a\xi_i)]^2} y^{-1}(\omega/y)^{\nu} J_{\nu+1}(y) {}_1F_1\left[\begin{matrix}\rho \\ \gamma+\rho\end{matrix}; \left(z-k\xi_i^2\right)t\right]. \tag{7.3}$$

स्पष्ट है कि $u(r, 0)=0$.

यदि $g(t)>0$, तो आन्तरिक वृत्तीय सिलिंडर के भीतर स्रोत होंगे जबकि दो समकेन्द्रिक सिलिंडरों के बीच के आयतन में गर्त (sinks) होंगे। यदि $g(t)<0$ तो स्रोत तथा गर्त अपने कार्यों का आदान-प्रदान कर लेंगे। (5.1) (6.1) तथा (7.1), से यह देखा जाता है कि $g(t)=0$ यदि $\rho\neq 1$ तथा $g(t)\neq 0$, यदि $\rho=1$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वी० एम० भिसे तथा डा० एस० एम० दास के प्रति आभारी है जिन्होंने क्रमशः इस निबन्ध की तैयारी में हाथ बंटाया तथा सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. भोंसले, बी० आर०। **मैथ० जैपोनि०**, 1966, **21**, 83-90.

2. कार्सला, एच०एस० तथा जीगर, जे० सी०। "Conduction of heat in solids" **द्वितीय संस्करण, आक्सफोर्ड, यूनि० प्रेस, लन्दन**, 1959.

3. एर्डेल्यी, ए० । "Tables of integral transforms, **भाग 2, मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.

4. लेबडेब, एन० एन० । "Special functions and their applications, **प्रेंटिस हाल, न्यूजर्सी**, 1965.

5. लूक, वाई० एल० । "Integrals of Bessels functions," **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1962.

6. स्नेडान, आई० एन० । "Fourier transforms," **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1961.

7. जेगो, जी० । **अमेरिकन मैथमेटिकल सोसा०**, 1959.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका
1967, **10**, 205-217

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 205-217

H-फलनों के प्रसार प्रमेय

ए० एन० गोयल तथा जी० के० गोयल

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 11, 1967]

सारांश

इस शोध में फाक्स के H-फलन के लिये ग्यारह प्रसार प्रमेय प्रस्तुत किये गये हैं।

Abstract

Expansion theorems of H-function. *By* A. N. Goyal and G. K. Goyal. Department of Mathematics, University of Rajosthan, Jaipur. In the present paper eleven expansion theorems for the Fox H-function are given.

विषय प्रवेश. गुप्ता [1] ने फाक्स [2] के H-फलन को निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित किया है

$$H_{p,q}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_p,e_p)\\(b_1,f_1)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j f_j s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+e_j s)}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_j s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-e_j s)}x^s\,ds \tag{1.0}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल की विवेचना 1, $0\leqslant l\leqslant q$, $0\leqslant u\leqslant p$; के रूप में की जाती है, जितने e तथा f हैं वे धनात्मक हैं; L बार्नेस प्रकार का उपयुक्त कंटूर है जिससे कि $\Gamma(b_j-f_j s)$, $j=1, 2,\dots l$, के ध्रुव कंटूर के दाईं ओर रहते हैं और $\Gamma(1-a_j+e_j s)$, $j=1, 2,\dots u$ के ध्रुव कंटूर की बाईं ओर रहते हैं। S-समाकल निम्नांकित दशाओं में से कम से कम एक में पूर्णतः अभिसारी होता है :-

(*i*) $\omega_1>0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(*ii*) $\omega_1\geqslant0$, $|\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

जहाँ $\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q} f_j$; $\omega_2=\frac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{q} a_j$

m के धनात्मक समाकलीय मानों के लिए

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)} \cdot m^{mz-1/2} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma(z+i/m) \tag{1.1}$$

जहाँ r धनात्मक पूर्ण संख्या है तो (1.1)

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+r+i}{m}\right)=m^{-r}(\alpha)_r \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+i}{m}\right) \quad . \; . \; . \quad (1.2)$$

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+r-i}{m}\right)=m^{-r}(\alpha-m+1)_r \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha-i}{m}\right) \quad . \; . \quad (1.3)$$

का रूप धारण कर लेता है और

$$\prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha-r+i}{m}\right)=(-m)^r[(1-\alpha)_r]^{-1} \prod_{i=0}^{m-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+i}{m}\right) \quad . \; . \quad (1.4)$$

जहाँ $(\alpha)_r$ क्रमगुणित (factorial) फलन है जो

$$(\alpha)_r=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+r-1) \quad . \; . \; . \quad (15)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है।

पुनः दुग्गल, सालशुट्ज, ह्विपल, गॉस (मकराबर्ट [3]) तथा गुप्ता [1] के अनुसार हमें निम्नांकित सूत्र प्राप्त होते हैं :-

$$F\begin{pmatrix}\alpha, \alpha/2+1, \beta, \gamma, \delta; 1\\ \alpha/2, \alpha-\beta+1, \alpha-\gamma+1, \alpha-\delta+1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\alpha-\delta+1)\Gamma(\alpha-\beta-\gamma-\delta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)\Gamma(\alpha-\gamma-\delta+1)\Gamma(\alpha-\beta-\delta+1)} \quad . \; . \; . \quad (1.6)$$

जहाँ $R(\alpha-\beta-\gamma-\delta)>-1$.

$$F\binom{\alpha, \beta, \gamma;\ 1}{\rho, \sigma} = \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\alpha-\sigma+1)\Gamma(\beta-\sigma+1)\Gamma(\gamma-\sigma+1)}{\Gamma(1-\sigma)\Gamma(\rho-\alpha)\Gamma(\rho-\beta)\Gamma(\rho-\gamma)} \quad (1.7)$$

जहाँ $\sigma+\rho=\alpha+\beta+\gamma+1$ तथा α, β, γ में से एक प्राचल (parameter) ऋणात्मक पूर्णांक है।

$$F\binom{\alpha, \alpha/2+1, \beta, \gamma;\ -1}{\alpha/2, \alpha-\beta+1, \alpha-\gamma+1} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\beta-\gamma+1)} \quad (1.8)$$

जहाँ $R(\alpha-2\beta-2\gamma)>-2$.

$$F\binom{2\alpha, 2\beta, \gamma;\ 1}{\alpha+\beta+\frac{1}{2}, 2\gamma} = \frac{L(\frac{1}{2})\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}\ \Gamma(\beta+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma-\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\gamma-\beta+\frac{1}{2})} \quad (1.9)$$

जहाँ $R(\gamma-\alpha-\beta)>-\frac{1}{2}$.

$$F\binom{a, b,}{c}{;1} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad \ldots \quad (2.0)$$

जहाँ $R(c-a-b)>0$.

तथा

$$H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1, s), (a_2, s)\ldots(a_p, s)\\ (b_1, s), (b_2, s)\ldots(b_q, s)\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{s}\ G_{p,q}^{l,u}\left(x^{1/s}\left|\begin{matrix}a_1\ a_2, \ldots a_p\\ b_1, b_2, \ldots b_q\end{matrix}\right.\right) \quad . \quad . \quad (2.1)$$

जहाँ s एक धनात्मक पूर्णांक है।

प्रमेय I. यदि $R(a)>0$ और यदि कम से कम

(i) $\omega_1>0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(ii) $\omega_1\geqslant 0$, $|\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

में से एक दशा में जहाँ

$$\omega_1=\sum_{j=2}^{u} e_j+\sum_{j=1}^{j} f_j-\sum_{j=u+}^{p-1} e_j-\sum_{j=l+1}^{q} f_j\ ;\ \omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{i=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{p-1} a_j-a$$ तो हमें

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_p-a)_r}{r!\Gamma(a_p-a_1+1+r)} H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1-r, e_1), (a_2, e_2)\ldots(a_p-1, e_{p-1}), (a, e_1)\\ (b_1, f_1)\ldots(b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a-a_1+1)} H_{p,q}^{l,u}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p,e_1)\\(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

प्राप्त होगा।

उपपत्तिः (2.2) में बाईं ओर (1.0) में से प्रतिस्थापित करके समाकलन के क्रम को बदलने पर तथा सरलीकरण करने पर हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+e_js)\, F\left(\begin{matrix}a_p-a,\ 1-a_1+e_1s\\ a_p-a_1+1\end{matrix};1\right)x^s\,ds}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=u+1}^{p-1}\Gamma(1-a_j+e_js)\Gamma(a-e_1s)\Gamma(a_p-a_1+1)}$$

प्राप्त होगा। (2.0) का व्यवहार करने पर तथा (1.0) की सहायता से विवेचना करने पर (2.2) के दाहिने ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय II. यदि $|h|<1$ और यदि

(*i*) $\omega_1>0,\ |\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(*ii*) $\omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

में से कम से कम एक दशा में, जहाँ

$$\omega_1=\sum_{j=1}^{u}e_j-\sum_{j=u+1}^{p}e_j+\sum_{j=1}^{l}f_j-\sum_{j=l+1}^{q}f_j;\ \omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j$$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-R)^r}{r!}H_{p,q}^{l,u}\left[x\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p-r,e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$

$$=(1-b)^{a_p-1}H_{p,q}^{l,u}\left[\frac{x}{(1-b)^{e_p}}\middle|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right]$$ प्राप्त होगा। (2.3)

उपपत्तिः (2.3) के बाईं ओर (1.0) में से प्रतिस्थापित करके

$$F(1-a_p+e_ps;\ ;b)=(1-b)a_p-1-e_ps$$

का प्रयोग करते हुए (1.0) के द्वारा विवेचना करने पर (2.3) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय III. यदि $R(\lambda+2b_q)<2$ और यदि

(i) $\omega_1>0,\ |\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(ii) $\omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

में से कम से कम एक दशा में जहाँ

$$\omega_1=\sum_{j=1}^{u}e_j-\sum_{j=u+1}^{p}e_j+\sum_{j=2}^{l}f_j-\sum_{j=l+1}^{q-1}f_j;\ \omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=2}^{q-1}b_j+3\lambda-\sum_{j=1}^{p}a_j$$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda(\frac{1}{2}\lambda+1)_r\Gamma(\lambda+r)(b_q-\lambda)_r(-1)^r}{(\lambda/2)_r\Gamma(2\lambda-b_q+1+r)r!}$$

$$\times H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p)\\ 2\lambda+r,f_1),(b_2,f_2)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(\lambda-r,f_1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p)\\ (2\lambda,f_1),(b_2,f_2)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q,f_1)\end{matrix}\right.\right]\ \text{प्राप्त होगा।}\quad(2.4)$$

उपपत्तिः (2.4) में बाईं ओर (1.0) से प्रतिस्थापित करके, समाकलन एवं संकलन का क्रम बदल देने पर और सरलीकरण पर

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=2}^{l}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+e_js)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(2\lambda-f_1s)\times F\left(\begin{matrix}\lambda,\lambda/2+1,b_q-\lambda,2\lambda-f_1s\\ \lambda/2,2\lambda-b_q+1,1-\lambda+f_1s\end{matrix};-1\right)x^s\,ds}{\prod_{j=l+1}^{q-1}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)\Gamma(2\lambda-b_q+1)\Gamma(1-\lambda+f_1s)}$$

प्राप्त होगा। (1.8) का प्रयोग करते हुए सरलीकरण करने पर (1.0) के प्रयोग द्वारा (2.4) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय IV. यदि $R(b_{q-1}+K)<1$ तथा यदि

(i) $\omega_1>0,\ |\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(ii) $\omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

में से कम से कम एक दशा में जहाँ

$$\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q-2} f_j-2f;\ \omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q-1} b_j+k-\sum_{j=1}^{q} a_j$$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda/2+1)_r\Gamma(\lambda+r)(b_{q-1})_r(k)_r}{(\lambda/2)_r\Gamma(\lambda-b_{q-1}+1+r)\Gamma(\lambda-k+1+r)r}$$

$$\times H^{l+1,u}_{p+1,q+1}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p),(\lambda,f)\\(\lambda+r,f),(b_1,f_1)\ldots\\(b_{q-2},f_{q-2}),(b_{q-1}+k,f)(-r,f)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda-b_{q-1}-k+1}\ H^{l,u}_{p,q}\left[\left|\begin{matrix}(a_p,e_1)\ldots(a_p,e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-2},f_{q-2}),(b_{q-1},f),(k,f)\end{matrix}\right.\right]\quad(2.5)$$

प्राप्त होगा।

उपपत्तिः (2.5) में बाईं ओर (1.0) में से प्रतिस्थापित करके, समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलकर, सरलीकरण करके (1.6) का प्रयोग करके (1.0) द्वारा विवेचना करने पर (2.5) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय V. यदि $|h/\lambda|<1$ तथा

(i) $\omega_1>0,\ |\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(ii) $\omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

में से कम से कम एक दशा में जहाँ $\Delta(\lambda,\alpha)$ द्वारा $\alpha/\lambda,\ \frac{\alpha+1}{\lambda},\ldots\frac{\alpha+\lambda-1}{\lambda}$ पैरामीटर प्रदर्शित किये जायँ, λ, r धनात्मक पूर्णांक हैं तथा

$$\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p} e_j+\sum_{j=\lambda+1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q} f_j+\lambda f;$$

$$\omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=\lambda+1}^{q} b_j+\Delta(\lambda,b)-\sum_{j=1}^{p} a_j \quad \text{तो हमें}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-b)^r}{r!}\; H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_p,e_p)\\ \{\Delta(\lambda,b+r),f\},(b_{\lambda+1},f_{\lambda+1})\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=(1+b/\lambda)^{-b}\, H_{p,q}^{l,u}\left[x(1+h/\lambda)^{\lambda f}\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_p,e_p)\\ \{\Delta(\lambda,b),f\},(b_{\lambda+1},f_{\lambda+1})\dots(b_p,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

उपपत्तिः (2.6) में बाईं ओर (1.0) से मान रखकर, समाकलन एवं संकलन का क्रम बदल कर (1.3) का प्रयोग करते हुए सरलीकरण करने पर,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=\lambda+1}^{l}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+e_js)\prod_{k=0}^{\lambda-1}\Gamma\left(\frac{b+k}{\lambda}-fs\right)F\left(b-\lambda fs;\,;-\frac{b}{\lambda}\right)x^s\,dx}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}$$

प्राप्त होगा

$F(b-\lambda fs;\,;-b/\lambda)=(1+b/\lambda)^{-b+\lambda fs}$ का प्रयोग करते हुए (1·0) के माध्यम से विवेचना करने पर (2.6) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय VI. यदि n तथा r धनात्मक पूर्णांक, $R(a_p)<n+1$ हों तथा कम से कम एक दशा में

(*i*) $\omega_1>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\omega_1\pi$

(*ii*) $\omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\tfrac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

जहाँ $\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p-1} e_j+\sum_{j=2}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q} f_j;\ \omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{p} a_j+r$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}^nC_r(-1)^{n+r}}{\Gamma(1+b_1-a_p+r)}H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p\ f_1)\\ (b_1+r,f_1),(b_2,f_2)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+b_1-a_p+n)}H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p-n,f_2)\\ (b_1,f_1)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right] \tag{2.7}$$

प्राप्त होगा ।

उपपत्तिः (2.7) के बाईं ओर (1.0) में से मान रखने पर, समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर तथा सरलीकरण पर

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+e_js)(-1)^n F\begin{pmatrix}-n, b_1-f_1s & ; 1\\ 1+b_1-a_p & \end{pmatrix} x^s\, ds}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=u+1}^{p-1}\Gamma(a_j-e_js)\Gamma(1+b_1-a_p)\Gamma(a_p-f_1s)}$$

प्राप्त होगा ।

अब $[\Gamma(1-a_p+f_1s+n)][\Gamma(1-a_p+f_1s)]^{-1}=(-1)^n\Gamma(a_p-f_1s)/\Gamma(a_p-f_1s-n)$

के साथ (2.0) का व्यवहार करते हुए (1.0) के माध्यम से विवेचना करने पर (2.7) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा । $n=1$ के लिए उपर्युक्त प्रमेय की उपप्रमेय के रूप में आवर्त सम्बन्ध प्राप्त होगा ।

उपप्रमेय I. यदि $n=1$

$$(1+b_1-a_p)\; H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p,f_1)\\(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p,f_1)\\(b_1+1,f_1),(b_2,f_2)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$-H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_{p-1},e_p-1),(a_p-1,f_1)\\(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

प्रमेय VII. यदि n तथा r धनात्मक पूर्णांक, $R(b_1-a_p)<n$ हों तथा निम्नांकित में से कम से कम एक दशा में

(i) $\omega_1>0, |\arg x|<\frac{1}{2}\omega\pi$

(ii) $\omega_1\geqslant 0, |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

जहाँ $\omega_1=\sum_{j=1}^{u}e_j-\sum_{j=u+1}^{p-1}e_j-\sum_{j=2}^{l}f_j-\sum_{j=l+1}^{q}f_j$; $\omega_2=\frac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j$

तो हमें

$$\sum_{r=1}^{n} {}^nC_r(-1)^{n+r} H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p+r,f_1)\\(b_1+r,f_1),(b_2,f_2)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(1-a_p+b_1)}{\Gamma(1+b_1-a_p-n)} H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p+n,f_1)\\(b_1,f_1)\dots(b_q,f_1)\end{matrix}\right.\right] \text{ प्राप्त होगा।} \quad \dots \quad (2.9)$$

उपपत्तिः (2.9) में बाईं ओर (1.0) में से मान रखने पर, समाकलन तथा संकलन संयोजन का क्रम बदलने पर, (2.0) का व्यवहार करने पर तथा (1.0) के द्वारा विवेचना करने पर (2.9) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा। उपर्युक्त प्रमेय की उपप्रमेय के रूप में $n=1$ पर एक आवर्त सम्बन्ध प्राप्त होगा।

उपप्रमेय I. यदि $n=1$

$$H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p,f_1)\\(b_1,f_1)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p+1,f_1)\\(b_1+1,f_1),(b_2,f_2)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$-(b_1-a_p) H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p+1,f_1)\\(b_1,f_1)\dots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right] \quad (3.0)$$

प्रमेय VIII. यदि n तथा r धनात्मक पूर्णांक, $R(a_p-b_p)>-n$ हों और निम्नांकित में से कम से कम एक दशा में

(*i*) $\omega_1>0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\omega_1\pi$

(*ii*) $\omega_1\geqslant 0$, $|\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

जहाँ $\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p-1} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q-1} f_j-2f$; $\omega_2=\frac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{p} a_j$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\dots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p+r,f)\\(b_1,f_1)\dots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q+r.\ f)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\Gamma(a_p-b_p+n)}{\Gamma(a_p-b_q)} H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_{p-1},e_{p-1}),(a_p+n,f)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q,f)\end{matrix}\right.\right] \quad (3.1)$$

प्राप्त होगा।

उपपत्तिः (3.1) के बाईं ओर (1.0) में से मान रखने पर, समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर, साधारणीकरण करने पर

$$[\Gamma(1-b_q-r+fs)]^{-1}=(-1)^r(b_q-fs)_r[\Gamma(1-b_q+fs)^{-1}$$

के साथ (2.0) का उपयोग करने पर तथा (1.0) के बल पर विवेचना करने पर (3.1) के दाईं ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय IX. यदि n, λ, r धनात्मक पूर्णांक हों तथा निम्नांकित में से कम से कम एक दशा में

(i) $\omega_1>0,\ |\arg x|<\frac{1}{2}\omega\pi$

(ii) $\omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\frac{1}{2}\omega_1\pi$ तथा $R(\omega_2+1)<0$

जहाँ $\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q} f_j;\ \omega_2=\frac{1}{2}(p-q(+2r+\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{q} a_j$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}^nC_r\lambda^{2r}}{\Gamma(1+k+r)\Gamma(1-K-n+r)}$$

$$\times H_{p+\lambda,q+\lambda}^{l+\lambda,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p),\{\triangle(\lambda,a-r),f\}\\\{\triangle(\lambda,a+r),f\},(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{\lambda^{2n}}{\Gamma(1-k-n)\Gamma(1+k+n)}$$

$$\times H_{p+2\lambda,q+2\lambda}^{l+2\lambda,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p),\{\triangle(\lambda,a-k-n),f\},\{\triangle(\lambda,a+k),f\}\\\{\triangle(\lambda,a-k),f\},\{\triangle(\lambda,a+k+n),f\},(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right] \quad (3.3)$$

प्राप्त होगा।

उपपत्ति: (3.2) के बाईं ओर (1.0) में से मान रखने पर समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर, (1.3), (1.4), (1.7) का प्रयोग करने पर तथा (1.0) के द्वारा परिणाम की विवेचना करने पर (3.2) के दाहिनी ओर का मान प्राप्त होगा।

प्रमेय X: यदि n, λ, μ, r धनात्मक पूर्णांक हों और $t=\lambda-\mu$, $R(a-b)>n$ तथा निम्नांकित में से कम से कम एक दशा में

$$(i)\ \omega_1>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\omega_1\pi$$

$$(ii)\ \omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\tfrac{1}{2}\omega_1\pi \text{ तथा } R(\omega_2+1)<0$$

जहाँ
$$\omega_1=\sum_{j=1}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q} f_j+2(\mu-\lambda)f;\ \omega_2=\tfrac{1}{2}(p-q+\mu-\lambda)$$
$$+\sum_{j=1}^{q} b_j+\Delta(2\lambda,2b+r)-\Delta(2\mu,2a-r)-\Delta(t,1-a+b+r)-\sum_{j=1}^{p}a_j$$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}^nC_r(-4\lambda\mu)^r}{(-2n)_r\,t^r}$$
$$\times H^{l+2\lambda,\,u+2\mu}_{p+\lambda+\mu,\,q+2\lambda}\left[x\left|\begin{matrix}\{\Delta(2\mu,2a-r),f\}(a_1,e_1)\ldots(a_p.e_p),\{\Delta(t,1-a+b+r),f\}\\ \{\Delta(2\lambda,2b+r),f\}(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-n)(2\pi)^{2\mu-1}}{n!}\left(\frac{\lambda\mu}{t}\right)^n H^{l+2\lambda,\,u+\lambda+\mu}_{p+2\lambda+2\mu,\,q+3\lambda+\mu}$$
$$\times\left[x\left|\begin{matrix}\{\Delta(2\mu,2a),f\},\{\Delta(t,1-a+b+n),f\},(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p),\{\Delta(\lambda,\frac{1}{2}+b),f\},\{\Delta(\mu,a-n),f\}\\ \{\Delta(2\lambda,2b),f\},(b_1,f_1)\ldots(b_q,f_q),\{\Delta(\lambda,\frac{1}{2}+b+n),f\},\{\Delta(\mu,a),f\}\end{matrix}\right.\right]$$

प्राप्त होगा।

प्रमेय XI. यदि n तथा r धनात्मक पूर्णांक, $R(b_q+n)>0$ हों और कम से कम एक दशा में

$$(i)\ \omega_1>0,\ |\arg x|<\tfrac{1}{2}\omega_1\pi$$

$$(ii)\ \omega_1\geqslant 0,\ |\arg x|\leqslant\tfrac{1}{2}\omega_1\pi \text{ तथा } R(\omega_2+1)<0$$

जहाँ $\omega_1=\sum_{j=2}^{u} e_j-\sum_{j=u+1}^{q} e_j+\sum_{j=1}^{l} f_j-\sum_{j=l+1}^{q-1} f_j$; $\omega_2=\frac{1}{2}(p-q)+\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{p} a_j+r$

तो हमें

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{{}^nC_r(-1)^{n+r}}{\Gamma(1-a_1+b_q+r)}\,H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1-r,e_1),(a_2,e_2)\ldots(a_p,e_q)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q,e_1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-a_1+b_q+n)}\,H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q,e_1)\end{matrix}\right.\right]\quad\ldots\quad(3.4)$$

प्राप्त होगा।

उपपत्तिः (3.4) में बाईं ओर (1.0) में से मान रखने पर, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदलने पर,

$$\Gamma(1-b_q+e_1s-n)\Gamma(b_q-e_1s+n)=(-1)^{n}\Gamma(b_q-e_1s)\Gamma(1+e_1s-b_q)$$

के साथ (2.0) का उपयोग करने पर तथा (1.0) के माध्यम से विवेचना करने पर (3.4) के दाहिनी ओर के मान की प्राप्ति होगी। उपर्युक्त प्रमेय में $n=1$ रखने पर रोचक उपप्रमेय प्राप्त होगी।

उपप्रमेय I. यदि $n=1$, तो हमें गुप्ता [1] का ज्ञात परिणाम

$$(1-a_1+b_q)\ H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p,e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q,e_1)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1-1,e_1),(a_2,e_2)\ldots a_p,e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_q,e_1)\end{matrix}\right.\right]-H_{p,q}^{l,u}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1,e_1)\ldots(a_p\ e_p)\\(b_1,f_1)\ldots(b_{q-1},f_{q-1}),(b_{q+1}\ e_1)\end{matrix}\right.\right]\quad\ldots\quad(3.5)$$

प्राप्त होगा।

भिसे [4] द्वारा माइजर G-फलन सम्बन्धी परिणाम उपर्युक्त शोध की विशिष्ट दशायें हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, के० सी० । एनाल्स द ला सोसा० साइं० ब्रुसेल्स, 1965, **79,** (II), 97-106.
2. फाक्स, सी० । ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98,** 395-429.
3. मैकराबर्ट, टी० एम० । Functions of complex variables, 1958, पृ० 372, 360, 363, 368.
4. भिसे, वी० एम० । जर्न० इण्डि० मैथ० सोसा०, 1963, **27,** 9-17.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 219-225

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 219-225

जलमग्न मिट्टियों में फास्फेट उपलब्धि

शिवगोपाल मिश्र तथा सन्तोष कुमार ओझा,

कृषि रसायन शाखा, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जुलाई 5, 1967]

सारांश

लाल तथा काली मिट्टियों के प्रतिनिधि नमूनों को ग्लुकोस, अमोनियम सल्फेट तथा आक्सैलेट से उपचारित करके 30 दिनों तक जलमग्न अवस्था में रहने दिया गया। यह देखा गया कि दोनों ही प्रकार की मिट्टियों में जलविलेय फास्फेट की मात्रा बढ़ गई और यह वृद्धि आक्सैलेट उपचार के साथ सर्वाधिक थी। दोनों ही मिट्टियों में Fe-*P* की मात्रा में ह्रास हुआ।

यदि इन्हीं मिट्टियों को फास्फेट विलयन से उपचारित करके प्राप्त फास्फेटीकृत मिट्टियों को उक्त प्रकार से उन्हीं उपचारों के साथ 30 दिनों तक जलमग्न रखा जाय तो दोनों ही मिट्टियों में, आक्सलैट उपचार को छोड़ कर, शेष सभी उपचारों में जलविलेय फास्फेट की मात्रा घटती देखी गई। Ca-*P* में किसी भी प्रकार के परिवर्तन की प्रवृत्ति नहीं देखी जाती।

Abstract

Availability of native and applied phosphate under waterlogged soil conditions. *By* S. G. Misra and S. K. Ojha, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, India.

Representative samples of black and red soils were kept water-logged for 30 days with glucose, ammonium sulphate and oxalate treatments. It was observed that water soluble-*P* increased with almost all the three treatments in both black and red soils, increase being highest in oxalate treatment. Fe-*P* decreased with all the treatments in both the soils.

In another set of experiment, phosphated soil samples were kept water-logged with all the three treatments and it was observed that water soluble-*P* decreased with almost all the treatments in both the soils except oxalate treatment. No definite trend of change in Ca-*P* is observed in both the soils.

मिट्टी में फास्फोरस कई प्रकार के रासायनिक संयोगों में पाया जाता है जैसे कि कैल्सियम फास्फेट, लोह फास्फेट, ऐल्युमिनियम फास्फेट तथा कार्बनिक फास्फेट। मिट्टी में फास्फोरस की उपलब्धि इन्हीं संयोगों से होती है। पाल तथा डिलांग[1] ने यह ज्ञात किया है कि अधिक काल तक जलमग्न रहने से कार्बनिक पदार्थ की उपस्थिति में मिट्टी में सरलता से विलेय फास्फोरस की मात्रा घट जाती है। इसका कारण उन्होंने सेस्क्वी-आक्साइड की बढ़ी हुई सक्रियता बताई है। किन्तु कुछ कार्यकर्ताओं ने (केरेजटेनी,[2] एवं इस्लाम तथा इलाही[3]) जलमग्न अवस्था में फास्फेट विलेयता में वृद्धि देखी है। उनका विचार है कि यह वृद्धि लोह के अपचयन से फेरस आयन में बढ़ती के कारण सम्भव है। यदि जलमग्न अवस्था में मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ, तथा ग्लुकोस या हरी खाद मिला दी जाय तो विलेय फास्फेट में और भी वृद्धि होती है (पाल तथा डिलांग,[1] एवं इस्लाम तथा इलाही[3])। विलियम्स इत्यादि[4] ने यह देखा है कि ग्लुकोस के साथ अवात अवस्था में कुछ कार्बनिक अम्ल उत्पन्न होते हैं। अवात अवस्था में मिट्टी के फास्फेट तथा फेरिक फास्फेट अधिक उपलब्ध हो जाते हैं।

उत्तर प्रदेश की काली मिट्टियाँ आधे वर्ष तक जलमग्न रहती हैं और बाद में उनमें गेहूँ की फसल बोई जाती है। लाल मिट्टियाँ कम समय तक जलमग्न रहती हैं और उनमें धान बोया जाता है। अतः यह आवश्यक प्रतीत हुआ कि इन दोनों वर्ग की मिट्टियों में जलमग्न अवस्था में फास्फेट उपलब्धि का अध्ययन किया जाय। इस अध्ययन के लिये मिट्टियों के साथ अमोनियम सल्फेट को उर्वरक के रूप में, ग्लुकोस को कार्बन के स्रोत के रूप में तथा आक्सैलेट को संकीर्णकारक (Complexant) के रूप में मिलाकर फास्फेट की उपलब्धि देखी गई।

प्रयोगात्मक

काली मिट्टी का नमूना बलिया जिले से तथा लाल मिट्टी का नमूना मिर्जापुर जिले से प्राप्त किया गया था। इन दोनों नमूनों का रासायनिक विश्लेषण किया गया[5]। प्राप्त परिणाम सारणी-1 में अंकित हैं।

काँच की परीक्षण नलियों में दोनों प्रकार की मिट्टियों के नमूनों की एक-एक ग्राम मात्रायें तौल ली गईं और उनमें ग्लुकोस (0·25 तथा 0·5%), अमोनियम सल्फेट (60 पौंड तथा 120 पौंड N/एकड़) तथा अमोनियम आक्सैलेट (50 मिग्रा० तथा 1.0 मिग्रा आक्सैलेट प्रति 100 ग्राम मिट्टी) की दो-दो मात्रायें मिलाकर आसुत जल से प्रत्येक नली में 20 मिली० आयतन कर लिया गया। इन नलियों के मुँहों को रुई से बंद करके एक मास तक के लिए छोड़ दिया गया।

एक दूसरे प्रयोग में काली तथा लाल मिट्टी के नमूनों को विलेय फस्फेट से उपचारित करके उन्हें फास्फेटीकृत कर लिया गया (जलविलेय फास्फेट को धोकर निकाल दिया गया, मिट्टियों में केवल ग्रहीत फास्फेट बच रहा) और फिर उनके साथ भी ऊपर दिये उपचार करके 20 मिली० तक जल से आयतन पूरा करके 30 दिनों के लिये छोड़ दिया गया।

इसके बाद छनित में जलविलेय फास्फेट की मात्रा ज्ञात की गई। मिट्टी का विश्लेषण फास्फेट के विभिन्न रूपों के लिये किया गया।

छनितों में फास्फेट निश्चयन के पूर्व उनमें विद्यमान ग्लुकोस अथवा आक्सैलेट को नाइट्रिक अम्ल तथा परक्लोरिक अम्ल से अभिकृत करके विनष्ट कर लिया गया। फास्फेट का निश्चयन रंगमापी विधि से सल्फो-मालिब्डिक अम्ल तथा क्लोरोस्टैनस अभिकर्मकों के द्वारा किया गया।[5] अकार्बनिक रूप में मिट्टी में प्राप्य

सारणी–1

प्रयुक्त मिट्टियों का रासायनिक विश्लेषण

अवयव		काली मिट्टी	लाल मिट्टी
1. सेस्क्वी आक्साइड (%)		17·9	5·3
2. $CaCO_3$ (%)		2·5	0·87
3. कार्बन (%)		0·48	0·76
4. पी-एच		8·3	6·4
5. (a) कुल P, मिग्रा॰ P/100 ग्रा॰		37·5	27·75
(b) Al-P	,,	2·0	0·75
(c) Fe-P	,,	3·2	2·0
(d) Ca-P	,,	13·25	2·0
(e) कार्बनिक P	,,	7·0	6·75

फास्फेट के विभिन्न रूपों का निष्कासन एवं उनका निश्चयन जैक्सन[5] द्वारा दी गई विधि से किया गया।

परिणाम और विवेचना

मिट्टी से प्राकृतिक फास्फोरस की उपलब्धि

यह देखा गया कि ग्लुकोस, अमोनियम सल्फेट तथा आक्सैलेट के कारण काली तथा लाल मिट्टियों में पाये जाने वाले प्राकृतिक फास्फोरस में ज़लमग्न अवस्था में निम्नांकित परिवर्तन होते हैं (सारणी 2)।

सारणी-2

जलमग्न अवस्था में मिट्टी के फास्फेट की उपलब्धि

उपचार	जल विलेय P(मिग्रा० P/100 ग्रा० मिट्टी)	P का विभाजन मिग्रा0 P/100 ग्रा० मिट्टी			P का प्रतिशत विभाजन		
		Al-P	Fe-P	Ca-P	Al-P	Fe-P	Ca-P
काली मिट्टी (कुल P=37·5 मिग्रा० P/100 ग्रा०)							
1. नियन्त्रित प्रयोग	6·7	3·4	2·3	16·5	9·06	6·13	44·0
2. मिट्टी+ग्लुकोस (अ)	8·2	2·9	2·3	17·0	7·73	6·13	45·3
3. ,, ,, (आ)	7·0	2·4	2·1	18·0	6·4	5·6	48·0
4. मिट्टी+अमो०सल्फेट (अ)	9·5	2·4	1·7	14·0	6·4	4·53	37·2
5. ,, ,, (आ)	6·5	6·8	2·0	16·0	18·1	5·32	42·6
6. मिट्टी+आक्सैलेट (अ)	10·0	7·0	1·0	15·5	18·6	2·66	41·3
7. ,, ,, (आ)	11·0	5·0	1·0	15·0	13·3	2·66	39·9
लाल मिट्टी (कुल P=27·75 मिग्रा० P/100 ग्रा०)							
1. नियन्त्रित प्रयोग	4·5	1·0	3·0	1·9	3·6	10·7	6·8
2. मिट्टी+ग्लुकोस (अ)	6·8	0·5	2·5	2·0	1·8	9·0	7·1
3. ,, + ,, (आ)	6·2	0·9	2·1	3·5	3·2	7·5	12·2
4. मिट्टी+अमो० सल्फेट (अ)	8·5	2·5	1·15	1·3	9·0	4·1	4·6
5. ,, + ,, (आ)	5·5	2·8	1·5	2·0	10·07	5·3	7·1
6. मिट्टी+आक्सैलेट (अ)	13·3	2·4	1·5	1·5	8·6	5·3	5·3
7. ,, + ,, (आ)	1·40	2·5	1·0	1·0	9·0	3·6	3·6

अ=कम मात्रा। आ=अधिक मात्रा

(1) सभी उपचारों में जलविलेय P की मात्रा में वृद्धि होती है और यह वृद्धि अमोनियम आक्सैलेट के साथ सर्वाधिक होती है। काली मिट्टी में जल विलेय P में 11·4% तथा लाल मिट्टी में 34·9% की वृद्धि देखी गई।

(2) मिट्टी में प्राप्य प्रारम्भिक Al-P में ग्लुकोस के साथ ह्रास होता है जबकि आक्सैलेट के साथ उसमें वृद्धि होती है।। अमोनिय सल्फेट द्वारा भी वृद्धि होती है किन्तु काली मिट्टी में कम मात्रा में अमोनियम सल्फेट डालने से Al-P में ह्रास हुआ।

(3) सभी उपचारों से Fe-P में ह्रास होता है। यह ह्रास लाल मिट्टी में काली मिट्टी की अपेक्षा कहीं अधिक है।

(4) दोनों मिट्टियों में ग्लुकोस के कारण Ca-P में वृद्धि होती है जबकि आक्सैलेट के कारण Ca-P में ह्रास होता है। अमोनियम सल्फेट के द्वारा Ca-P में भी ह्रास की प्रवृत्ति अधिक है।

यह विचित्र बात है कि आक्सैलेट के कारण एक ओर सर्वाधिक जलविलेय P उपलब्ध होता है और दूसरी ओर Ca-P की उपलब्धि में घटती होती है। यही नहीं, जलमग्न होने से दोनों ही मिट्टियों में Fe-P की मात्रा घटती है जबकि Al-P तथा Ca-P में वृद्धि देखी जाती है। ऐसा प्रतीत होता है कि कुछ निष्कासित फास्फेट पुनः इन रूपों में बन्धित हो जाता है। किन्तु यदि Al-P, Fe-P तथा Ca-P की मात्रायें जोड़ी जायँ तो उनमें प्रारम्भिक अवस्था से कोई अन्तर नहीं दीखता अतः यह अनुमान ठीक नहीं है कि अकार्बनिक रूपों से फास्फेट का निष्कासन होता होगा। उनमें तो स्थानान्तरण मात्र हुआ प्रतीत होता है। सम्भव है कि जो फास्फेट जलविलेय अवस्था में आया है वह कार्बनिक फास्फेट के खनिजीकरण से प्राप्त हुआ हो।

ग्रहीत फास्फेट का निष्कासन या उपलब्धि

जब फास्फोटीकृत मिट्टियों को 30 दिनों तक ग्लुकोस, अमोनियम सल्फेट तथा अमोनियम आक्सैलेट के साथ जलमग्न रहने दिया गया तो निम्नांकित परिणाम प्राप्त हुये :—

(1) काली मिट्टी में सभी उपचारों से जलविलेय P की मात्रा में ह्रास हुआ। लाल मिट्टी में आक्सैलेट के द्वारा जलविलेय P में वृद्धि तथा अमोनियम सल्फेट से ह्रास देखा गया।

(2) दोनों मिट्टियों में Al-P में कोई परिवर्तन नहीं देखा गया।

(3) प्रत्येक उपचार के साथ काली मिट्टी में Fe-P बढ़ने की प्रवृत्ति पाई गई। लाल मिट्टी में वृद्धि के साथ-साथ ह्रास भी देखा गया।

(4) काली मिट्टी में Ca-P में कोई अन्तर नहीं देखा गया किन्तु लाल मिट्टी में ग्लुकोस के साथ Ca-P में वृद्धि और अमोनियम सल्फेट के साथ ह्रास देखा गया।

जलमग्न दशा में मिट्टियों के प्राकृतिक फास्फेट में से Fe-P में ह्रास होता है जब कि Ca-P में कोई परिवर्तन नहीं देखा जाता।

सारणी–3

जलमग्न अवस्था में ग्रहीत फास्फेट की उपलब्धि

उपचार	जलविलेय-P (मिग्रा० P/100 ग्रा० मिट्टी)	P का विभाजन (मिग्रा० P/100 ग्रा० मिट्टी)			P का % विभाजन		
		Al-P	Fe-P	Ca-P	Al-P	Fe-P	Ca-P
काली मिट्टी कुल P=53·0 मिग्रा० P/100 ग्रा० मिट्टी (15·5 मिग्रा० ग्रहीत P+37·5 मिग्रा० मिट्टी का P)							
1. नियन्त्रित प्रयोग (फास्फेटीकृत मिट्टी)	6·5	10·0	0·5	17·5	19·0	0·94	33·0
2. फास्फेटीकृत मिट्टी +ग्लुकोस (अ)	4·5	11·0	1·0	17·5	20·7	1·9	33·0
3. ,, ,, (आ)	3·5	11·0	2·0	16·0	20·7	8·8	30·1
4. ,,+अमो०सल्फेट(अ)	3·5	11·0	2·0	16·5	20·7	3·8	31·1
5. ,, + (आ)	3·5	10·0	1·5	17·5	19·0	2·8	33·0
6. ,, + आक्सैलेट(अ)	4·0	10·5	1·5	16·5	19·9	2·8	31·1
7. ,, + ,, (आ)	7·5	9·5	1·0	17·5	18·1	1·9	33·0
लाल मिट्टी कुल P=37·5 मिग्रा० P/100 ग्रा० मिट्टी (10·75 मिग्रा० ग्रहीत P+26·7 मिग्रा० मिट्टी का P)							
1. नियन्त्रित प्रयोग (फास्फेटीकृत मिट्टी)	4·0	5·5	3·0	3·5	14·6	8·0	9·3
2. फास्फेटीकृत मिट्टी +ग्लुकोस (अ)	4·5	5·5	3·0	4·5	14·6	8·0	12·0
3. ,, + ,, (आ)	3·0	4·5	4·0	4·5	12·0	10·6	12 0
4. ,,+अमो०सल्फेट(अ)	2·5	5·5	2·0	2·5	13·3	5·3	6·6
5. ,, + ,, (आ)	2·5	6·0	2·0	3·0	16·0	5·3	8·0
6. ,, +आक्सैलेट(अ)	5·5	5·5	2·5	3·0	14·6	6·6	8·0
7. ,, + ,, (आ)	5·0	6·0	4·0	6·0	16·0	10·6	16·0

अ=कम मात्रा । आ=अधिक मात्रा

इस अध्ययन से यह निष्कर्ष निकलता है कि चाहे लाल मिट्टी हो अथवा काली, जलमग्नता के कारण उनके फास्फेट रूपों में परिवर्तन होता है। यह परिवर्तन उन फास्फेटों में परस्पर स्थानान्तरण या सन्तुलन के कारण सम्भव है किन्तु जलविलेय अवस्था में फास्फेट का बढ़ना या कम होना यह बताता है कि अवश्य ही फास्फेट किन्हीं अन्य स्रोतों से उपलब्ध हो रहा है।

जलमग्न होने से मिट्टियों की फास्फेट उपलब्धि पर जो प्रभाव पड़ता है वह उपचारों पर निर्भर करता है।

मिट्टी में प्रारम्भ से विद्यमान फास्फेट अथवा ऊपर से डाले गये फास्फेट इन दोनों में ही जलमग्नता का प्रभाव पड़ता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (सन्तोष कुमार ओझा) उत्तर प्रदेश की साइंटिफिक तथा इंडस्ट्रियल रिसर्च कौंसिल का आभारी है जिसने आर्थिक सहायता पहुँचाई है।

निर्देश

1. पाल, एच० तथा डिलांग डब्लू० ए०। **साइं० एग्रि०**, 1949, **29**, 137-147.

2. केरेजटनी, बी०। **सॉयल एण्ड फर्टी०**, 1953, **16**, 2064.

3. इस्लाम, एम०ए० तथा इलाही एम०ए०। **जर्न० एग्रि० साइं०**, 1954, **45**, 1.

4. विलियम्स, सी० इत्यादि। **जर्न० एग्रि० रिसर्च**, 1958, **9**, 640-63.

5. जैक्सन, एम० एल०। Soil Chemical Analysis. **एशिया पब्लिशिंग हाउस**, 1962.

विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका
1967, **10**, 227-229

VIJNANA PARISHAD
ANUSANDHAN PATRIKA
1967, **10**, 227-229

लेगेण्ड्र फलन तथा माइजर-G फलन के गुणनफल सम्बन्धी समाकल

के० एस० सेवरिया

गणित विभाग, गवर्नमेंट कालेज, अजमेर

[प्राप्त—जून 8, 1967]

सारांश

क्रियात्मक कलन की विधि से लेगेण्ड्र फलन तथा माइजर के G-फलन के गुणनफल से सम्बन्धित एक समाकल का मान ज्ञात किया गया है।

Abstract

An integral involving product of Legendre function and Meijer's G-Function. *By* K. S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of this paper is to evaluate an integral involving product of Legendre function and Meijer's G-function by the method of Operation Calculus.

1. विषय-प्रवेश. सर्वसम्मत लैपलास परिवर्त

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt \tag{1}$$

को $\phi(p)\doteq f(t)$ संकेत द्वारा अभिहित करते हैं।

पार्सेवाल गोल्डस्टाइन सूत्र कहता है कि यदि $\phi(p)\doteq f(t)$ तथा $\psi(p)\doteq g(t)$

तो
$$\int_0^\infty \phi(t)\,g(t)\,t^{-1}\,dt=\int_0^\infty \psi(t)\,f(t)\,t^{-1}\,dt \quad . \; . \; . \tag{2}$$

2. उदाहरण. [1, p. 183(14)] को लीजिए

$$f(t)=J_\nu(at)\,J_\nu(bt)$$

$$\doteq\frac{p}{\pi(ab)^{1/2}}Q_{\nu-1/2}\left(\frac{p^2+a^2+b^2}{2ab}\right)$$

$$=\phi(p),\ R(p)>0,\ R(\nu+\tfrac{1}{2})>0,\ a>0,\ b>0$$

तथा [4, p. 40(11)]

$$g(t)=2^{4\lambda+1/2}\,\pi^{3/2}\,t^{-2\lambda}G^{m,n}_{l,q+2}\left(\frac{t^4}{16c^2}\Big|\begin{matrix}1,\ldots,\alpha_l\\ \beta_1,\ldots,\beta_q,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\lambda\end{matrix}\right)$$

$$\doteqdot p^{2\lambda}G^{m,n+2}_{l+2,q}\left(\frac{16}{c^2p^4}\Big/\begin{matrix}\lambda/2,\ \frac{1}{2}+\lambda/2,\ \alpha_1\ldots,\ \alpha_l\\ \beta_1,\ldots\ldots,\beta_q\end{matrix}\right)$$

$$=\psi(p),\ R(p)>0.$$

(2) में इन परिणामों का उपयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{-2\lambda}\,Q_{\nu-1/2}\left(\frac{t^2+a^2+b^2}{2ab}\right)\,G^{m,n}_{l,q+2}\left(\frac{t^4}{16c^2}\Big/\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_l\\ \beta_1,\ldots\beta_q,\ \frac{1}{4}+\lambda/2,\frac{3}{4}+\lambda/2\end{matrix}\right)\ t$$

$$=\frac{(\pi ab)^{1/2}}{2^{4\lambda+1/2}}\int_0^\infty t^{2\lambda-1}\mathcal{J}_\nu(at)\,\mathcal{J}_\nu(bt)\,G^{m,n+2}_{l+2,q}\left(\frac{16}{c^2t^4}\Big/\begin{matrix}\lambda/2,\ \frac{1}{2}+\lambda/2,\ \alpha_1,\ldots,\ \alpha_l\\ \beta_1,\ \ldots,\beta_q\end{matrix}\right)$$

प्राप्त होगा। दाहिनी ओर के समाकल का मान ज्ञात परिणाम [2, p. 350(5)] के आधार पर निकालने पर

$$\int_0^\infty t^{-2\lambda}\,Q_{\nu-1/2}\left(\frac{t^2+a^2+b^2}{2ab}\right)\,G^{m,n}_{l,q+2}\left(\frac{t^4}{16c^2}\Big/\begin{matrix}\alpha_1,\ \ldots,\alpha_l\\ \beta_1,\ \ldots,\beta_q,\ \frac{1}{4}+\lambda/2,\ \frac{3}{4}+\lambda/2\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{(\pi ab)^{1/2}}{2^{\lambda+5/2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2ab)^{\nu+2r}}{r!\,\Gamma(1+\nu+r)(a^2+b^2)^{\lambda+\nu+2r}}$$

$$\times G^{m+2,n}_{l,\ q+2}\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{16c^2}\Big/\begin{matrix}\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_l\\ \frac{\lambda+\nu+1}{2}+r,\ \frac{\lambda+\nu}{2}+r,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_q\end{matrix}\right)$$

क्योंकि
$$(t+q)<2(m+n+1),\ R(\lambda+\nu+2-4\alpha_j)>0,$$
$$(j=1,\ \ldots,n),\ R(1+4\beta_i-2\lambda)>0,\ (i=1,\ \ldots,\ m)$$

$m=0=q$, $n=2=l$ तथा $\alpha_1=1-\frac{1}{2}\mu$, $\alpha_2=1+\frac{1}{2}\mu$ मानने पर हमें ज्ञात परिणाम [3] मिलेगा।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms, भाग I, मैक-ग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

2. मल्लू, एच० बी० । मोनैट० फुर मैथ०, 1966, **70**, 349-356.

3. मल्लू, एच० बी० तथा सेवरिया, के० एस० । (प्रकाशनार्थ, प्रेषित)

4. सक्सेना, आर० के० । प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया, 1961, 27